Si quis tamen partem latius sumat, pro omni quod quantitatem habet et quantitatem habenti inest, poterit dicere, lineam esse superficie minorem.

Pars minor est toto. Est enim aequalis parti ejus, nempe sibi ipsi.

Totum est aequale omnibus partibus integrantibus, coincidunt enim; vel certe si conjungantur, quia totum componunt, coincidentia reddentur, adeoque et congruent.

Pars partis est pars totius. Adeoque minus minore est minus majore. Nam parti minoris aequale est; ergo et parti majoris, parti scilicet partis majoris.

Duo homogenea habent communem mensuram quantumvis exacte propinquam. Ostendimus supra, cum scalam explicaremus. Si duorum homogeneorum unum altero neque majus neque minus est, erit aequale. In scala supra posita (fig. 8) comparentur AG et AE, appliceturque AG ipsi scalae, et puncto A manente, incidet punctum G inter B et A, posito AG esse minus quam AB. Ponamus jam demonstrari posse quod recta AG translata in AB, manente puncto A, punctum G neque incidat intra E et B, neque inter A et E, id est quod AG nec sit major nec minor quam AE, utique punctum G incidet in ipsum punctum E, adeoque AG erit ipsi AE aequalis. Quod de duabus rectis, idem demonstrari potest de omnibus homogeneis, nam omnia possunt reddi similia, et ubi similia reddita sunt, si nec magnitudine differunt, nullo modo per se discerni poterunt, sed congrua erunt, adeoque cum congrua reddi possint, aequalia sunt.

DE MAGNITUDINE ET MENSURA.

(1) Magnitudo est, quod in re exprimitur per numerum partium, congruentium rei datae, quae Mensura appellatur.

Scholium. Exempli causa lineae magnitudo exprimitur numero pedum vel pollicum, id est partium quarum quaelibet congruit pedi vel pollici in aliqua materia (velut orichalco aut ligno) reapse dato. Sic orgyiae magnitudo (quantum homo brachia extendere potest) ad certum aliquid (velut per aversionem) designandum censetur exprimi numero sex pedum, vel septuaginta duorum pollicum, quia pes duodecim pollicum habetur. Cubiti magnitudo est unius et dimidii pedis, vel unius pedis et sex pollicum, vel octodecim pollicum. Ponimus autem pedis vel pollicis magnitudinem reapse in organo datam esse. Unde patet quoque, eandem ejusdem rei magnitudinem diversis numeris exprimi, prout variatur mensura, imo interdum diversas mensuras conjungi inter se, ut cum cubitus simul designatur per pedem et pollices.

(2) Homogenea sunt, quorum magnitudines numeris exprimi possunt eandem assumendo pro omnibus mensuram tanquam unitatem.

Scholium. Ita si pes sit ut unitas, erit pollex ut $\frac{1}{12}$, cubitus ut $\frac{3}{2}$, orgyia ut 6. Sin pollex sit ut unitas, erit pes ut 12, cubitus ut 18, et orgyia 72. Et hoc modo lineae rectae cujusque longitudo exprimi potest numero quidem integro, si mensura aliquoties detracta, verbi gratia pede ter detracto, restet nihil, ita enim recta tripedalis erit. Sed si mensura vel pede quoties fieri potest detracto restet aliquid, ad id quoque mensurandum sumi poterit certa pars pedis, exempli causa decima, quae rursus quoties fieri potest detrahetur ab hoc residuo; exempli causa vicibus septem et pede assumto pro unitate, numerus quantitatis detractae erit fractus 3 et $\frac{7}{10}$ vel $\frac{37}{10}$. Et hoc modo si res mensuranda ita sit exhausta ut restet nihil, is numerus rei respondebit, magnitudinemque ejus exprimet. Sin adhuc supersit aliquid, tunc vel possumus iterum novam assumere mensurae partem, veluti centesimam, eamque detrahere quoties fieri potest; et si error centesima parte minor nobis satis magni momenti non videatur, contenti possumus esse hac per mensuram et mensurae decimas vel centesimas appropinquatione, alioqui ad millesimas et ultra progressuri. Solemus autem in praxi adhibere scalam, id est constantem quandam mensurae divisionem in orichalco aut alia durabili materia factam, et quidem per decimas et decimas decimarum seu centesimas et millesimas et porro, quoniam hoc modo fractiones decimaliter expressae tractari possunt instar integrorum, qui nobis decadica progressione, id est per unitates, decades, centenarios, millenarios, myriades etc. exhiberi solent; ita Ludolphus de Colonia calculo longe producto invenit, diametro circuli existente 1, circumferentiam esse

$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000}$ vel (quod in decimalibus licet) conjungendo statim in unam fractionem $\frac{3141593}{1000000}$ etc. usque ad ...... sedem. Sed quoniam appropinquationes hujusmodi, etsi praxi vulgari sufficientes, nullam dant exactam magnitudinis quaesitae cognitionem, ideoque in scientifico progressu tamdiu pergimus, donec appareat series progrediendi in infinitum; et huic fini non adhibemus indistincte decimales, aut alias quaslibet scalae constantes divisiones, sed accommodamus fractiones ad rei naturam, ut scilicet facilius ad legem progressus perveniamus. Atque ita a me repertum est, si diameter sit $\frac{1}{8}$, circumferentiam fore $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \frac{1}{195}$ et ita porro in infinitum, posito fractionum numeratorem esse unitatem, sed denominatores esse qui fiunt ex duobus imparibus 1 et 3, 5 et 7, 9 et 11, 13 et 15, 17 et 19, et ita porro, invicem multiplicatis. Et ea ratione non tantum omnes appropinquationes continuando dabiles simul exprimuntur, sed etiam fieri potest ut error minor sit quovis dato, nam ostendi potest, si circumferentiam dicatur esse $\frac{1}{3}$, errorem fore minorem quam $\frac{1}{5}$; si dicatur esse $\frac{1}{3} + \frac{1}{35}$, errorem minorem fore quam $\frac{1}{9}$; si dicatur esse $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{195}$, errorem fore minorem quam $\frac{1}{13}$, et ita porro, priorem semper ex imparium proximorum combinatione sumendo. Tota autem series infinita exacte naturam circuli exprimit. Sed hoc nos r a t i o n i b u s ex intima natura circuli consecuti sumus; o r g a n i c e autem magnitudo circumferentiae circuli vel alterius lineae curvae per filum obtineri potest, curvae lineae rigidae accommodatum et deinde in rectam extensum et scalae applicatum, vel dum curva linea rigida volvitur in plano, quanquam provolutio illa ad securitatem filo vel catena regenda sit, ne tractio ei misceatur. Motu etiam res obtinetur, dum duo mobilia velocitatis uniformis percurrunt rectam et curvam, nam erunt lineae iisdem temporibus absolutae ut mobilium velocitates. Quodsi res mensuranda sit superficies, pro mensura poterit alia assumi superficies, verbi gratia pes quadratus qui vel cujus determinatae partes a plana superficie quoties fieri poterit detrahentur: quodsi superficies plana non sit, videndum an commode transformari possit in planam. Pro solidi mensura aliud assumetur solidum, veluti pes cubicus, eodemque modo procedetur. Comparari etiam solidorum magnitudines poterunt immergendo in liquorem, et mensurando quantum ille in vase attollatur; sed et ponderando, si ambo ex eadem materia elaborentur, idemque et ad lineas et superficies suo quodam modo potest transferri. Atque ita Galilaeus Cycloidis dimensionem ponderibus investigavit, etsi veram dimensionem scientifica deinde ab aliis ratione repertam hac methodo non fuerit consecutus. Motu etiam superficies et solida interdum commode mensurantur, tanquam vestigia lineae aut superficiei. Generaliter autem omnis aestimatio ex nostra magnitudinis definitione ad mensurae cujusdam repetitionem numeris expressam redit, aut ad numerum rei ascribendum, posito rei alteri datae ascribi unitatem. Eaque ratione etiam non tantum extensiones et difusiones partium extra parte, ut in spatio et tempore, sed etiam intensiones seu gradus qualitatum actionumque, jura etiam, valores, verisimilitudines, perfectiones aliaque inextensa ad numeros revocantur, reperta scilicet mensura cui aut cujus partibus aliquotis congruant, quae in re mensuranda reperiuntur, sed cujus aut cujus partium aliquotarum repetitione magnitudo aestimanda formetur. Quae consideratio quanti sit momenti, et quam in ea consistat vis verae Matheseos Universalis seu artis aestimandi in universum, in Dynamicis nostris speciminibus est ostensum.

(3) Commensurabilia sunt inter se, quorum reperiri potest una mensura communis exhauriens, cujus repetitione magnitudines eorum constituantur; sin minus, incommensurabilia vocantur, et numerus ei, quod cum mensura pro unitate assumta incommensurabile est, assignandus vocatur surdus vel irrationalis; sin commensurabilis sit unitati, rationalis appellatur.

Scholium. Si nempe mensuram vel partes aliquotas mensuram sua repetitione constituentes quoties fieri potest detrahendo perveniatur ad exhaustionem, semper haberi potest communis mensura repetitione constituens. Nam tota magnitudo mensuranda exprimitur vel integris vel composito ex integris et fractis. Jam fracti quotcunque reduci possunt ad communem divisorem, atque ita ad communem mensuram. Esto numerus inventus magnitudinem quaesitam lineae exprimens $2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$, reducendo ad communem denominatorem fiet $\frac{17}{6}$; itaque si pes sit 1 vel $\frac{6}{6}$, utique communis mensura rei aestimatae et pedis erit $\frac{1}{6}$, quae quantitas in re aestimata continetur decies septies, in pede sexies. Sed si sexta pars pedis seu bipollicaris linea assumatur pro unitate seu mensura, erit pes ut 6, linea vero aestimanda ut 17, adeoque pes et linea commensurabiles erunt. Sed si fractiones procedant in infinitum, nec in unum numerum assignabilem integrum vel fractum summando colligi possint, magnitudo aestimanda erit ei, cui unitatem assignavimus, vel partibus ejus aliquotis (hoc est repetendo eam conficientibus) incommensurabilis. Veluti si linea sit quae constet uno pede et duabus decimis pedis et tribus centesimis et quatuor millesimis, et quinque 10000mis, et sic in infinitum, ita ut pede posito ut 1, linea sit ut $\frac{1}{1} + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{6}{100000} + \frac{7}{1000000}$ etc. vel $\frac{1234567}{1000000}$ etc. vel more decimalium 1.234567 etc. Ita enim nunquam exhaurietur linea quae mensuranda est, et tamen vera ejus magnitudo exacte expressa habetur. Quotiescunque enim numerus est rationalis, ut vocant, seu unitati commensurabilis, toties decimalibus expressus periodo constat, ita ut characteres iidem semper recurrant in infinitum, ut suo loco ostendemus; quod hoc loco non fieri constructio ipsa ostendit. Porro communem mensuram investigandi haec ratio prodita est a Mathematicis, uti suo loco exponemus, ut a majore detrahatur minus quoties fieri potest, Residuum deinde rursus quoties fieri potest ab ipso Minore antea detracto detrahatur, et secundum Residuum a secundo detracto seu primo residuo, et a secundo Residuo similiter tertium; ita necessario vel ad exhaustionem devenietur, eritque ultimum detractum exhauriens ipsa maxima communis mensura toties in prima magnitudine seu comparatarum majore contenta, quoties unitas in producto ex omnibus quotientibus invicem multiplicatis inest; vel si residua supersint in infinitum, incommensurabiles erunt duae primae quantitates, quemadmodum et residua omnia; sed ipsa series quotientium si certa lege constet, qui exprimunt quoties quivis minor a praecedente detrahi possit, comparationem scientificam duarum magnitudinem dabit. Interim fictione quadam possumus concipere, omnes quantitates homogeneas esse velut commensurabiles inter se, fingendo scilicet elementum aliquod infinitesimum vel infinite parvum. Tali fictione constat calculus Logarithmorum, certo aliquo Elemento Logarithmico constituto. Similis fictio locum habet in Geometria, rem concipiendo perinde ac si omnes lineae constarent ex infinitis numero lineolis rectis infinite parvis, et ita perinde ac si lineae curvae essent polygona infinitorum laterum, vel perinde ac si superficies constarent ex infinitis facieculis planis, id est perinde ac si solida concava vel convexa omnia essent polyhedra hedrarum infinitae exiguitatis. Eodem modo fingi potest, omnia solida constare ex corpusculis elementaribus aequalibus infinitis numero et magnitudine infinite parvis. Et haec fictio nullum potest afferre errorem, quia (si rite procedas ex hypothesi) error nunquam fit major particulis aliquot elementaribus, qui nullam cum toto comparationem habet, de quo nostra incomparabilium Lemmata videantur. Unde si pro particulis elementaribus fictitiis seu infinite parvis assumamus veras assignabiles quantumlibet parvas, ostendi potest, errorem qui in ratiocinando admissus videri possit, minorem esse quovis dato errore, id est nullum assignari posse. Licet autem ad commensurabilitatis imitationem concipi possit, infinitesimalia illa seu infinite parva elementa aequalia esse inter se, interdum tamen fingi praestat alia procedere ratione utili ad ratiocinationem juvandam. Quae melius apparebunt ex parte illa interiore Doctrinae magnitudinum seu Matheseos Universalis, qua nempe continetur Scientia infiniti.

DE RATIONE ET PROPORTIONE.

Duarum rerum Ratio inter se habebitur, habita forma comparationis earum secundum quantitatem, et contra. Hinc etsi ambarum quantitates sint incognitae, potest tamen ratio earum esse cognita; licet enim ignorem exempli causa, quot sint nasi aut quot sint oculi in hac civitate, scio tamen numerum nasorum bis repetendum esse ut fiat numerus oculorum.

Comparare duas res secundum quantitatem est quaerere modum inveniendi quantitatem unius ex data sola quantitate alterius. Hic enim finis est comparationis duarum rerum, ut postea sufficiat saltem unam in promptu habere et comparationis meminisse; ita sensu unius et memoria alterius tantum efficimus, quantum sensu utriusque, minore autem pretio constat memoria quam sensus, quia memoria etiam absentium est.

Itaque rationem duarum rerum inter se habere, idem est quod habere modum cognoscendi unam ex data altera sola. Equidem si summam duarum quantitatum sciamus, vel etiam differentiam, etiam unam ex alia cognita invenimus, sed non sola; tria enim occurrunt homogenea, duae scilicet quantitates, v. g. lineae AB et BC (fig. 11) et earum summa (vel differentia) AC et duas noscere necesse est ad inveniendam tertiam. In ratione vero solum-

