40982. DE CALCULO SITUUM
[nach Dezember 1715]

Überlieferung: *l* Reinschrift: LH 35 I 15 Bl. 1–8. 8 Bl. 4°. 8 S.[noch] – Gedr.: Couturat, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 548–556.

Datierungsgründe: [noch]

De Calculo Situum.

§ 1. Ut in Calculo Magnitudinum ⟨cum ipsas Magnitudines formamus dum⟩ addimus, multiplicamus, in se ducimus et horum reciproca peragimus, tum etiam conferimus per rationes, aliasve relationes progressiones ac denique Majoritates, Minoritates et Aequationes. Ita in Situ formamus Extensa per Sectiones et Motus, deinde conferimus, spectamusque in eis praeter Magnitudines Similitudinem, Congruentiam (ubi concurrunt Aequalitas et Similitudo) Coincidentiam, adeoque Determinationem. Determinatum enim est cui aliquid, iisdem positis conditionibus, coincidere debet.

§ 2. Et ut doctrina Magnitudinis sua habet Axiomata, veluti Totum sua parte majus est. Quod majus est majore majus est minore. Si aequalibus aequalia addas proveniunt aequalia, aliaque id genus. Ita Doctrina Situs Axiomata propria habet qualia sunt:

Si Similitudo, Congruentia, Coincidentia sint in Determinantibus, esse etiam in determinatis, et vicissim, si ea sint in Determinatis erunt quoque in Determinantibus simplicissimis.

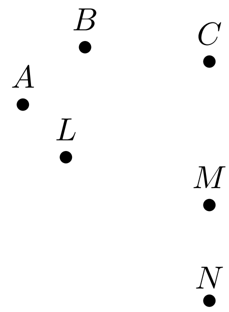
Exempli causa. Ponamus non nisi unicam Rectam a puncto ad punctum duci posse, sequetur omnes Rectas esse inter se similes, quia ad determinandam Rectam ab A. ad B. nihil aliud opus est quam assumi A, B. et ad aliam LM, saltem assumi situm punctorum L, M. Situs vero duorum punctorum situi aliorum duorum semper similis est quia nihil differentiae praeter solam magnitudinem distantiae totius assignari potest, sed magnitudo jam est aliquid ad tertium relatum. ⟨Non tamen Situs punctorum duorum Situi punctorum aliorum ⟨duorum⟩ plane [idem] ⟨congruus⟩ erit nisi ita ponantur ut quodlibet Extensum continuum quod applicari potest inter Terminos unius situs possit etiam applicari inter Terminos situs alterius.⟩

Similia vero sunt quae ambo seorsim spectata sunt indiscernibilia ita ut nihil sumi possit in uno cui simile sumi nequeat in altero, abstrahendo ubique ab aliqua determinata

Magnitudine nisi excipias magnitudinem Angulorum, quae ab doctrinam situum, non vero ad doctrinam Magnitudinum referri debet.

Cum ergo probaverimus omnes situs binorum punctorum esse similes, etiam determinata, seu omnes Lineae Rectae erunt Similes.

§ 3. Contra non omnia Triangula per situm trium punctorum determinata sunt similia inter se. Neque enim ABC similiter se habent ut LMN. Potest enim Distantia AB ad Distantiam BC aliam rationem habere quam Distantia LM ad distantiam MN, ita ut in determinantibus sit dissimilitudo. Ex quo patet etiam in duabus Rectis lineis tria puncta tribus aliis dissimiliter sita eligi posse.



[*Fig. 1*]

Nam similitudo a determinato reciproce tantum valet ad pure determinantia, non etiam ad ea quae sunt plus quam determinantia.

Sic, etiamsi Circulus determinetur per tria puncta peripheriae data, et omnes Circulos inter se similes esse minime sit negandum, tamen hic Consequentia non valet a determinatorum similitudine ad determinantium similitudinem, quia Peripheriae tria puncta data plus determinant, quam ipsum Circulum, scilicet etiam certum Angulum in segmento, et tres partes peripheriae determinatam ad totum Circulum rationem habentes.

At contra si Circuli duo determinentur per datas duas Chordas et per aequales Angulos in segmentis super Chordas factis, tum demum Circuli non solum similes erunt, sed etiam similiter determinati. Hic autem quaestio nec de tali quidem determinatione est, sed saltem de primis et simplicissimis determinantibus, quae ubi determinata fiunt similia, etiam similia esse debent.

Si vero contingeret, dissimilia determinantia nihilominus dare similia determinata, id ipsum certo indicio est hanc determinationem non esse simplicissimam, sed aliam dari simpliciorem.

§ 4. Uti Magnitudinum Logisticam seu Mathesin generalem ad calculum reducimus, utimurque imprimis rationibus et aequationibus, ita calculus quidam in situ institui potest per similitudines et congruentias.

Literae autem in Calculo Magnitudinis designare solent ipsas Magnitudines. In Calculo Situs possunt designare puncta et loca. Hinc si $YA \simeq B.A.$ locus omnium Y est superficies sphaerae.

In hac Consignatione $B.A.$ significat situm puncti $B.$ ad punctum A, sed $\simeq$ est signum congruitatis. Sensus ergo illius Consignationis talis est. Quodlibet indeterminatum Y eum situm habere ad punctum determinatum A quem habet B ad $A.$ unde intelligitur ipsum B quoque inter ea Y seu in eadem superficie sphaerae esse. Sed si posuissem $Y.A. \simeq B.C.$ non opus fuerit B in superficie sphaerae poni. ⟨ Sed jam maneat $Y.A. \simeq B.A.$ ⟩

§ 5. Jam posita adhuc sphaera $ZL. \simeq ML.$ et considerando has duas superficies sphaericas se intersecare et loca communium concursuum vocari $V.$ unumquodque $V.$ erit simul $Y.$ et $Z.$ ut scribere possim $V.A. \simeq BA$ et $V.L. \simeq ML.$ Potest autem B assumi coincidens ipsi M (quod ita signatur $B \propto M$) quod vocetur F, determinatum ex ipsis $V.$ fietque $V.A. \simeq F.A.$ et $V.L. \simeq F.L.$ unde componendo fit $V.A.L. \simeq F.A.L.$ unde sequitur, Lineam in qua se secant duae superficies sphaericae ejus esse naturae ut quodvis ejus punctum V habeat ad duo data $A.L.$ situm eundem quem constans $F.$ (quae proinde una est ex ipsis V) ad eadem puncta $A.L.$

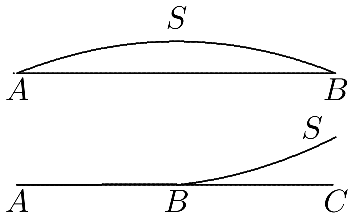
[*Fig. 2*]

§ 6. Idem etiam sic enuntiari poterat: Quodvis extensum $A.G.L.$ cujus duo puncta $A.$ et $L.$ quiescunt, motu suo talem lineam $V.V.V.$ describet qualem formant duae superficies sphaericae sua intersectione, id est Circularem, quia cum Extensum ponatur rigidum adeoque punctum quodvis ut G suum situm servet ad puncta $A.L.$ durante motu extensi continuo quiescentia, inde quodlibet Vestigium ipsius $G.$ circumvoluti situm eundem ad duo puncta fixa $A.$ et $L.$ retinebit non aliter ac supra scripsimus $V.A.L \simeq F.A.L.$

§ 7. Puncta vero quaevis quae dicto Motu durante una cum punctis A et L quiescunt, eo ipso quia quiescunt, oportet esse situs sui ad $A.$ et $L.$ unica. Nam si moverentur pluribus locis eundem situm ad A et $L.$ exhibere possent, siquidem omnia eorum vestigia eundem situm ad $A.$ et $L.$ haberent. Jam vero ea puncta sunt sua ipsorum vestigia, id est describent Circulos indefinite parvos sive evanescentes in puncta. Ita prodit Linea Recta cujus Expressio haec erit. Posito puncti quovis ejus indeterminato $R.$ dicetur $R.A.L.$

20 Qvodvis | punctum *ändert Hrsg.* | A.G.L. *L*

Unicum seu si $R.AL \simeq (R)A.L$ erit $R \infty (R)$.

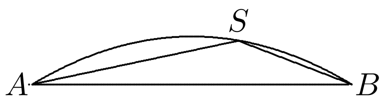


[*Fig. 3*]

§ 8. Hinc patet duas Rectas non transire per eadem duo puncta ut ABC et ABS. Nam si in Rotatione Plani punctis A. et B. fixis totum planum moveatur, illa rotatio efficiet ut quicquid semel fuit altero superius seu propius externo initio rotationis id facie versa fiat postea inferius seu remotius ab initio rotationis externo. At, si tam Lineae ASB quam ACB essent Rectae, facta rotatione ad Fixa puncta A. et B. oporteret ambas quiescere ex natura Lineae Rectae modo ostensa. Si ambae quiescerent, S semper maneret supra extensum ABC et nunquam caderet infra, quod est contra Naturam Rotationis.

§ 9. Hinc statim colligimus Rectas inter se similes esse, habere partem toti similem, quin etiam Rectam Lineam esse simplicissimam, cum nihil aliud quam extrema ad totam suam determinationem requirat, adeoque et minimam inter extrema, et pro distantia punctorum in posterum sumi posse. Pro distantia sumetur, quia Terminis immotis, distantiam Terminorum oportet esse immotam. Si ergo alia Linea inter A. et B praeter Rectam assumeretur pro distantia, etiam illa punctis A et B. Fixis in rotatione Plani maneret immota, preater Rectam AB. etiam immotam in eadem rotatione per § 7. Ergo darentur duae diversae Lineae simul immotae in hac rotatione, quod absurdum per § 7.

Brevissima erit, quia si alia brevior ab A. ad B. pertingit, Linea ⟨ seu extensum ⟩ assequetur distantiam se ipso majorem quod absurdum.

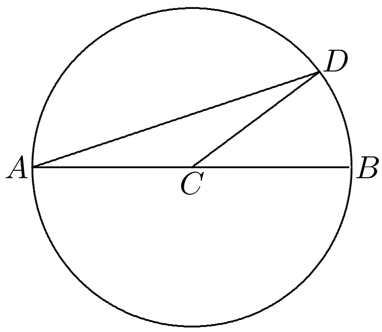


[*Fig. 4*]

Si alia aequalis datur, ut si esset ASB non quidem Recta, aequalis tamen rectae ABC, oporteret distantias $AS + SB$. non esse majores quam $A.B$. quia non possunt esse majores conterminis curvis $AS + SB$ (quae ponuntur ipsi AB aequales) ex natura brevissimi. Sed Euclides demonstravit esse $AS + SB$ majores quam AB. nullis principiis huic (Brevissima duo inter eosdem terminos non dantur) innitentibus implicite assumtis, sed ex puris angulorum sitibus ratiocinando. Ergo patet quoque nostri asserti veritas, quod duo brevissima inter eosdem Terminos non dentur.

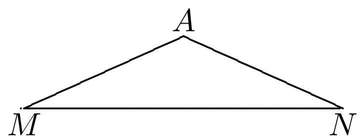
§ 10. Fortasse tamen illud Euclideum ex paucioribus etiam demonstrari potest Scilicet.

Dissimiles Arcus in eodem Circulo a Chordis aequalibus abscindi nequeunt. Id quod ex natura similium per se constare censendum est.



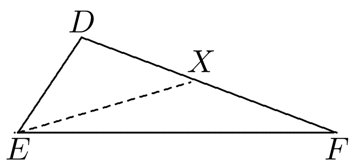
[*Fig. 5*]

Itaque Diametrus AB major est Chorda AD nam Chorda AD abscindit Arcum dissimilem dimidio Circuli AB (alias ab A ad B rediret contra § 8). Ergo per positum principium non erit $AD = AB$. Sed nec $AD \sqcap AB$, quia $CA + CD = AB$ duplum Radii duplo Radii. Ergo hoc pacto esset $AD \sqcap CA + CD$ Brevissimum majus altero iisdem Terminis interjecto quod absurdum. Cum ergo Chorda AD nec aequalis sit Diametro nec major, patet Diametrum quavis Chorda majorem esse.



[*Fig. 6*]

Hinc sequitur tertium Trianguli Isoscelis AMN duo latera tertio sunt majora. Nam Circulum Centro A, per M et N ducendo $AM+AN$ aequantur Diametro seu duplo Radii sed MN modo fiet Chorda ejus Circuli. Ergo ut paulo ante probatum $AM + AN \sqcap MN$.

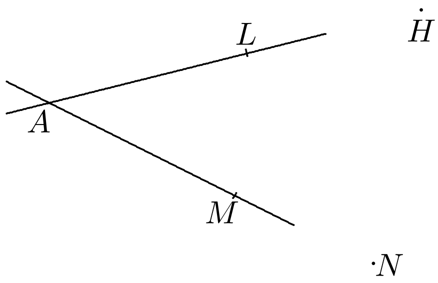


[*Fig. 7*]

Denique Dico in quocunque Triangulo duo latera reliquo esse majora $DE + DF \sqcap$

EF. Nam abscindo $DX = DE$, Ergo $DE+DX \sqcap EX$, ut de Triangulo Isoscele ostensum. Addo utrinque XF. Ergo $DE + DX + XF \sqcap EX + XF$. Id est $DE + DF \sqcap EX + XF$ (**א**).

Aut igitur $DE+DF$ minus erit brevissimo EF, quod absurdum per § 9. aut aequale (et sic per ea quae ad literam **א** probavi erit $EF \sqcap EX + XF$ Brevissimum alio cointerjecto absurdum) aut denique $DE+DF$ majus erit quam EF quod erat demonstrandum.



[*Fig. 8*]

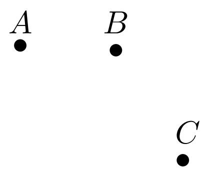
§ 11. Ut Linea Recta est locus omnium punctorum sui situs ad duo puncta unicorum, ita Planum est locus omnium punctorum sui situs ad tria puncta unicorum, unde patet, etiam assumtis duabus rectis se intersecantibus haberi Planum. Esto enim Recta per $A.L.$ et alia per $A.M.$ Habemus tria puncta $A.L.M.$ nec tantum determinata sunt puncta omnia Rectae per AL et omnia Rectae per AM sed et omnes distantiae a quovis puncto unius Rectae ad quodvis punctum alterius rectae, adeoque quodvis punctum in quavis harum distantiarum (quae etiam sunt Lineae Rectae) determinatum est seu sui situs ad $A.L.M.$ unicum.

§ 12. Jam Rectae per $A.L.$ omnia puncta vocentur Y et Rectae per $A.M.$ omnia puncta appellentur Z. erit ita $A.L.Y.$ unicum et $A.M.Z.$ unicum. Ex ipsis Y unum sit H, et ex ipsis Z unum sit N erit $A.L.H.$ unicum et $A.M.N.$ unicum. Sumatur alius locus cujus quodvis punctum V sit unicum sui situs ad $H.N.$ Sed ipsum $H.$ est unicum ad $A.L.$ et ipsum $N.$ est unicum ad $A.M.$ Ergo $V.$ erit unicum ad $A.L.A.M.$ Nam in Determinationibus pro Determinato substitui possunt Determinantia. Cum ergo sit $V.$ ad $A.L.A.M.$ unicum et repetitio ejusdem $A.$ supervacanea sit, saltem inde inferetur esse $V.$ ad $A.L.M.$ unicum. Id est omnia puncta $V.$ esse in eodem plano cum $A.L.M.$ quia Planum est locus omnium punctorum sui situs ad tria puncta Fixa Unicorum.

§ 13. Sequetur etiam Duo Plana sese secare in Linea Recta. Sit $X.$ Unicum ad $A.B.C.$ et $Y.$ unicum ad $L.M.N.$ Puncta vero utriusque Plani communia omnia vocentur $Z.$ ita ut puncta Z sint unica sui situs tam ad $A.B.C.$ quam ad $L.M.N.$ Ergo omnia Z tam $X.$ erunt quam $Y.$ Producantur Distantiae $LM.LN.$ et $MN.$ dum Plano per $A.B.C.$ occurrat in $\lambda.\mu$ et ν. quod fieri necesse est quia planum quodvis secat totum spatium et sectio communis procedit in Infinitum. Item, omnis Recta procedet in infinitum. Necesse igitur est ut ad aliud Planum seu ad sectionem communem perveniat.

§ 14. Sed ne moveatur objectio, forsan unam inter Distantias $L.M.N.$ esse sectioni Parallelam, duo nobis puncta λ. et ν. sufficiunt. Quodsi vero omnia tria in sectionem cadant nihilominus es duobus eorum determinatis determinatum erit tertium, alioqui si tria essent indeterminata inter se determinarent Planum in ipsa intersectione Planorum, quod absurdum, quia sic ipsa quoque intersectio Planum foret. Itaque fiet $Z.\lambda.\nu.$ unicum id est omnia puncta Z. cadent in Lineam Rectam. Hinc quia duae Rectae se mutuo non nisi in unico puncto secare possunt, trium Planorum Intersectio punctum erit.

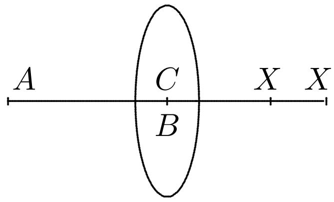
§ 15. Videndum etiam quid fiat, si tres superficies sphaericae se secent, ubi locus intersectionis extensum esse nequit. Neque enim duarum Linearum sectio Extensum est. Facile autem ostendi potest, per duo puncta innumeros transire circulos, etsi possit etiam aliquando Ciculus circulum attingere saltem in uno puncto, etiam tum, quando non sunt in eodem Plano, etsi se non tangant. Circulum vero ex tribus punctis determinari manifestum est.



[*Fig. 9*]

Nam ex duobus punctis A. et B. determinatur Recta cujus omnia puncta ad duo puncta haec se habent eodem modo, inter quae etiam est Centrum Circuli. Similis locus punctorum ad B et C eodem modo se habentium (inter quae idem Centrum esse debet) extat in Recta punctis B et C. determinata. Ergo Centrum Circuli est in ambabus iis Rectis, id est in earum Intersectione sive: Ergo intersectio ambarum Rectarum est punctum ejusdem relationis ad ($B.C.B.A.$ et cum B repetere supervacaneum sit ad) $B.C.A.$ quod punctum omnino debet esse Centrum Circuli per $A.B.C.$

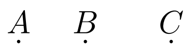
20 f. debet) | extrat *ändert Hrsg.* | in L



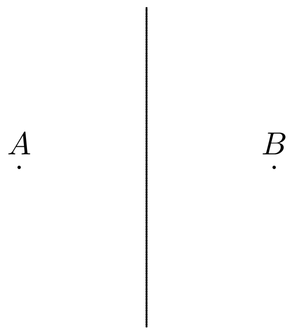
[*Fig. 10*]

Sed nos supra definivimus Circumferentiam Circuli, locum punctorum eodem modo se habentium ad duo puncta Fixa. Hinc Circulus erit Locus punctorum eodem modo se habentium ad quodvis punctum X. Rectae per AB, determinata substituendo pro Determinantibus.

§ 16. Sumantur tria puncta in Circumferentia hujus Circuli et Planum per ea transiens, cui occurrerat Recta per AB. in Puncto quod sit C. Ergo Circumferentia est locus punctorum eodem modo se habentium ad C. ostendendumque erit omnia puncta Peripheriae cadere in hoc Planum per tria puncta Peripheriae ipsius ductum. Quod fiet si ostendatur Planum esse locum omnium punctorum ad duo quaedam puncta eodem modo se habentium. Rectam vero esse locum omnium punctorum eodem modo se habentium ad tria quaedam puncta.



[*Fig. 11*]



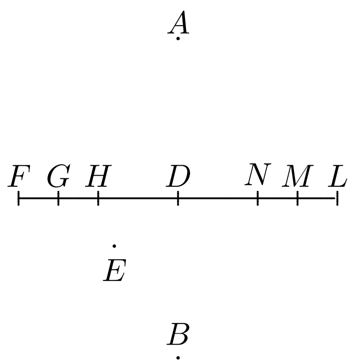
[*Fig. 12*]

Sint puncta $A.B.C$. Duarum jam quarumcunque Sphaerarum circa A et circa B. intersectiones, cadent in Planum. Idem est de duabus quibuscunque sphaeris circa A et C. Inde, quia hoc sufficit ad determinandum, Consequens est, Planum ex intersectionibus sphaerarum circa A et B et Planum ex intersectionibus sphaerarum circa B. et C. aut circa A. et C. eandem determinare Rectam ad quaevis puncta hujus Plani eodem modo se habentem; ad quae illisio Rectae in illud planum eodem modo se habet.

§ 17. In Plano quoque possumus concipere Rectam ut locum omnium punctorum eodem modo se habentium ad duo tantum puncta A. et B. Adeoque omnes Circumferentiae aequales circa A. et B. se secabunt in hoc loco seu in hac Linea Recta. Hic modus locum determinandi diversus est a priore. Aliud enim est dicere, locum omnium punctorum eodem modo se habentium ad duo puncta A. et B. esse Rectam. Aliud locum omnium punctorum eodem modo se habentium ad A. ut ad B. esse Planum. Nam prior proprietas sic exprimitur: $A.B.C. \simeq A.B.Y.$ in solido. Locus omnium Y. Recta sed posterior proprietas sic exprimitur: $A.Y. \simeq B.Y.$ erit locus omnium Y. Planum. Sed, si omnia Y. sint in eodem Plano cum AB et inter se posito $A.Y \simeq B.Y.$ erit locus omnium Y. Linea Recta.

Ex $A.B.C. \simeq A.B.Y.$ sequitur $A.C. \simeq A.Y.$ et $B.C. \simeq B.Y.$ unde constat Y. cadere in Sphaeram Centro A. Radio AC. et in Sphaeram centro B. radio $B.C$.

§ 18. Ex Contactibus etiam Sphaerarum in uno puncto sequitur dari locum Unicorum ad duo puncta, vel vicissim ex hoc sequitur Contactus Sphaerarum in uno puncto. Idem est in Plano de Contactibus Circulorum.



[*Fig. 13*]

$FA \simeq FB \simeq LA \simeq LB$. sic $GA \simeq GB \simeq MA \simeq MB$. Nempe circulus centro A radio AE descriptus cum sit E infra Rectam et A. supra Rectam, secabit eam bis in F et L, quae sectionum puncta sibi continuo appropinquant, F. transeundo in $G.H$. etc.: et L in M. N. etc.: Ubi autem sibi occurrent, ibi in unum coalescent in D. eritque ibi duorum Circulorum Contactus. Hinc si A et B sint ea ad quae omne punctum rectae FL eodem modo se habet, erit D sui situs ad ea unicum et in Rectam per $A.B$. cadet. Videtur etiam sequi has Rectas se non nisi in uno puncto secare.