II.

Analysin Geometricam propriam eique connexum *calculum situs*, hic attentabimus nonnihil speciminis gratia, ne forte pereat cogitatio, quae aliis quod sciam in mentem non venit, et usus longe alios ab iis dabit, quos Algebra praestat. Sciendum enim est diversae considerationis esse magnitudinem et situm. Magnitudo datur etiam in illis quae situm non habent, ut numerus, proportio, tempus, velocitas, ubicunque scilicet partes existunt, quarum numero seu repetitione aestimatio fieri potest. Itaque eadem est doctrina magnitudinis et numerorum, Algebraque ipsa vel si mavis Logistica, tractans de magnitudine in universum, revera agit de numero incerto vel saltem innominato. Sed situs magnitudini vel partium multitudini formam quandam superaddit, ut in numeris figuratis. Hinc patet, Algebram continere Analysin proprie et per se ad Arithmeticam pertinentem, etsi ad Geometriam et situm transferatur, quatenus linearum et figurarum magnitudines tractantur. Sed tunc necesse est, Algebram multa supponere propria Geometriae vel situs, quae et ipsa resolvi debebant. Analysis igitur nostra resolutionem illam effectui dat nihil amplius assumens aut supponens nec tam magnitudini, quam ipsi per se situi accommodata. Nunc autem ad explicandam rem situs non nisi *congruentia* utemur, sepositis in alium locum *similitudine* et *motu*.

(1) *Congrua* sunt quae sibi substitui possunt in eodem loco, ut ABC et CDA (fig. 65), quod sic designo ABC $\simeq$ CDA. Nam $\sim$ mihi est signum similitudinis, et $=$ aequalitatis, unde congruentiae signum compono, quia quae simul et similia et aequalia sunt, ea congrua sunt.

(2) *Eodem modo se habere* hic censentur vel *congruenter*, ea quae in congruis sibi respondent. Exempli causa AB.ABC$\simeq$CD.CDA, nempe AB est ad ABC, ut CD ad CDA; ita et AB.AC$\simeq$CD.CA et A.BC$\simeq$C.DA, id est punctum A eodem modo se habet ad rectam BC, ut punctum C ad DA. Neque enim hic tantum de ratione aut proportione agitur, sed de relatione quacunque.

(3) *Axioma*: Si determinantia sint congrua, talia erunt etiam determinata, posito scilicet eodem determinandi modo. Exempli gratia si A.B.C$\simeq$D.E.F, etiam circumferentia circuli per A.B.C

congruet circumferentiae circuli per D.E.F, quia datis tribus punctis circumferentia circuli est determinata. Et in universum in calculo congruentiarum substitui possunt determinata pro determinantibus sufficientibus, prorsus ut in vulgari calculo aequalia aequalibus substituuntur. Vid. infra § 26. § 30. § 32.

(4) Ut autem calculus melius intelligatur, notandum est, cum dicitur A.B.C $\simeq$ D.E.F, idem esse ac si simul diceretur A.B $\simeq$ D.E et B.C $\simeq$ E.F et A.C $\simeq$ D.F, ita ut haec ex illo fieri possint *divellendo*, et illud ex his *conjungendo*. Vid. infra § 26. 27. § 29. § 30. § 31. § 32.

(5) *Terminus communis* est locus qui inest duobus locis, ita ut pars eorum non sit. Sic punctum E est locus, qui inest rectis AE, CE, pars autem est neutrius. Itaque terminus earum communis esse dicetur.

(6) *Sectio* est duarum partium totum constituentium nec partem communem habentium terminus communis totus. Ita AC est terminus communis totus triangulorum ABC, CDA constituentium totum ABCD nec habentium partem communem.

(7) Hoc ita calculo exprimemus, per quem Geometria ad Logicam refertur. Punctum omne in proposito loco existens communi nota vel litera designetur (exempli gratia) X, et ipse locus designetur per $\overline{X}$, lineam super litera ducendo. Si quaevis loci puncta sint Y et Z, loca erunt $\overline{Y}$ vel $\overline{Z}$. Sit ergo totum $\overline{X}$, partes constituentes sint $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$, et sectio sit $\overline{V}$, formari poterunt hae propositiones: Omne Y est X, omne Z est X, quia $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ *insunt* ipsi $\overline{X}$. Sed et quod non est Y nec Z, id non est X, posito $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ esse *partes constituentes* seu exhaurientes totum $\overline{X}$. Porro omne V est Y, et omne V est Z, quia $\overline{V}$ est ipsis $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ *commune*, seu utrique inest. Denique quod est Y et Z simul, id etiam est V, quia $\overline{V}$ est *sectio* seu terminus communis totus, scilicet qui continet quicquid utrique commune est, partem enim (seu aliquid praeter terminum) non habent communem. Hinc omnes Logicae subalternationes, conversiones, oppositiones et consequentiae hic locum interdum cum fructu habent, cum alias a realibus proscriptae fuerint visae, hominum vitio, non propria culpa.

(8) *Coincident* loca $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, si omne X sit Y, et omne Y sit X. Hoc ita designo: $\overline{X} \approx \overline{Y}$.

(9) *Punctum* est locus, in quo nullus alius locus assumi

potest, itaque si in puncto $\odot$ assumatur locus ☽, coincidet ☽ ipsi $\odot$, et vicissim si ☽ insit in $\odot$ et ex hoc solo concludatur coincidere $\odot$ et ☽, erit $\odot$ punctum.

Spatium absolutum est contrarium puncto; nam in spatio omnis alius locus assumi potest, ut in puncto nullus, ut ita punctum sit simplicissimum in situ, et velut minimum, spatium vero sit diffusissimum et velut maximum.

(10) *Corpus* (mathematicum scilicet) seu *solidum* est locus, in quo plus est quam terminus. Atque hoc scilicet volumus, cum solido tribuimus profunditatem. Contra quicquid in superficie aut linea est, terminus intelligi potest, et commune esse alicui cum alio partem communem cum ipso non habente. Analogia hic etiam est inter punctum et solidum, quod quicquid puncto inest, punctum est; contra cui solidum inest, id solidum est. Item, punctum non potest cuiquam inesse ut pars; at solidum nulli aliter inesse potest quam ut pars.

(11) *Planum* est sectio solidi utrinque eodem modo se habens ad ea, quae solidi terminos non attingunt, seu utrinque eodem modo se habens ad ea, quae fiunt in una parte ut in alia. Si pomum plano secas, duorum segmentorum extrema, quibus cohaerebant, distingui invicem non possunt.

(12) Itaque si solidum interminatum sit, absolute verum est, planum secans utrinque eodem se modo habere. Sin terminatum sit solidum, sufficit terminos in rationes non venire. Et utrinque eodem modo facta etiam ad sectionem se eodem modo habebunt.

(13) *Recta* est sectio plani utrinque eodem modo se habens ad ea, quae terminos plani non attingunt.*)

(14) Sit planum interminatum AA (fig. 66), ejusque sectio BB utrinque se habens eodem modo, erit BB recta interminata.

(15) Sed et si planum sit terminatum CC (fig. 67), quaecunque ejus figura sit, si tamen tegamus terminos ut non appareant, vel rationem eorum nullam habeamus, reperiemus rectam

---

*) Hierbei macht Leibniz die folgende Bemerkung: quid si quis dubitet an planum ita secari possit? an praestat ergo rectam formare sectione duorum planorum?

secantem DD utrinque se eodem modo habere, eaque erit terminata.

(16) Curva vero diversimode se habet utrinque, cum ab uno latere sit concava, ab alio convexa.

Quae sequentur, nunc quidem omnia in plano intelligantur.*)

(17) Si sit recta (fig. 68), in qua puncta A et B, et extra eam punctum C ab uno latere, tunc oportet dari posse aliud D ab altero latere, quod eodem modo se habeat ad A et B, quo C se ad ea habet. Nam alioqui cum puncta haec sint in recta ex hypothesi, unum latus non ita ut alterum ad rectam se haberet, contra rectae definitionem. Dato igitur C.A.B inveniri potest D, ut sit C.A.B $\simeq$ D.A.B.

(18) Itaque si detur punctum X suae ad duo puncta A.B relationis unicum, id non poterit esse ab alterutro latere rectae per A.B; alioqui contra hypothesin daretur aliud ei geminum, per praecedentem. Hinc necesse est ut cadat in ipsam rectam, ubi gemina alibi in unum coëunt, cum recta sit utriusque lateris terminus communis. **)

(19) Recta igitur (terminata scilicet) est locus omnium punctorum suae ad duo in ipsa puncta relationis unicorum. Sit X.A.B $\simeq$ Z.A.B, atque ideo X coincidat ipsi Z, erit $\overline{X}$ recta (interminata) per A.B.***)

---

*) Necessarium videtur, plani proprietatem aliquam ratiocinationem ingredi, qualis, quod congruae sunt duae figurae planae eorundem terminorum, seu quod intus uniforme. Randbemerkung von Leibniz.

**) Leibniz hat bemerkt: Demonstranda adhuc conversa, nempe omne punctum in recta esse suae relationis ad duo in ea puncta unicum.

Rursus omne punctum in recta per A.B est suae ad duo illa puncta relationis unicum. Id punctum sit X; si non est unicum, ergo dabitur Ω ad A.B ut X ad A.B; quia X in recta per A.B ex hyp., ergo et Ω; erit ergo aliquis in recta linea ordo inter quatuor puncta A.B.X.Ω, ergo non $\simeq$A.B.X et A.B.Ω. Supponitur locum esse *lineam*, in (recta?) linea non est omnium punctorum ordo. Ergo dantur in ea duo puncta eodem modo se habentia ad duo puncta in ipsa, itaque locus ad duo determinatus est linea.

***) Generaliter omne punctum in linea non in se redeunte est suae ad duo in ea sumta puncta relationis unicum. Bemerkung von Leibniz.

(20) Unde jam colligitur, duas rectas non posse sibi occurrere nisi in uno puncto, seu duas rectas, quae habeant duo puncta A et B communia, productas coincidere inter se, cum utraque sit locus omnium (atque adeo eorundem) punctorum suae ad puncta A et B relationis unicorum. Atque ita datis duobus punctis determinata est recta, in quam cadunt.

(21) Hinc porro duae rectae, quae scilicet productae non coincidunt, non possunt habere segmentum commune. Nam si segmentum commune AB (fig. 69) habeant, duo etiam puncta minimum habebunt communia A.B, ergo productae coincident.

(22) Similiter duae rectae non possunt claudere spatium, alioqui bis sibi occurrerent, adeoque duo puncta communia haberent (fig. 70).

(23) Ita ex nostra rectae definitione demonstrantur Axiomata, quae Euclides sine demonstratione circa rectam assumsit.

(24) *Circulus* fit rectae circa unum punctum quiescens motu in plano. Extremum quiescens erit centrum, linea ab altero extremo descripta erit circumferentia.

(25) Itaque (fig. 71) omnia circumferentiae puncta, ut X, sese eodem modo habebunt ad centrum C, seu omnia X se habebunt ad C, ut A ad C. Quod ut calculo nostro exprimatur, si sit $X.C \simeq A.C$, erit $\overline{X}$ *circuli circumferentia.*

(26) Locus omnium punctorum eodem modo se ad duo puncta habentium est *recta.* Sint duo puncta C et D (fig. 72), sitque locus $\overline{X}$, cujus quodlibet punctum X eodem modo se habeat ad C quo ad D; dico $\overline{X}$ esse rectam. Quod ut demonstretur, in loco $\overline{X}$ sumantur duo puncta A et B, ducatur recta $\overline{Z}$ per A et B; ea determinata est ex ipsis A.B per § 20. Jam $A.B.C \simeq A.B.D$ ex hypothesi, quia A et B cadunt in $\overline{X}$; ergo (per axioma § 3) etiam recta per A.B seu $\overline{Z}$ eodem modo se habebit ad C ut ad D, seu erit $\overline{Z}.C \simeq \overline{Z}.D$; jam etiam $X.C \simeq X.D$ ex hypothesi, ergo conjungendo $X.\overline{Z}.C \simeq X.\overline{Z}.D$. Ergo punctum X non potest esse ab uno latere rectae Z, veluti (si placet) a latere D; ita enim se aliter haberet ad rectam $\overline{Z}$ et ad D, quam ad rectam $\overline{Z}$ et ad C, itaque necesse est X cadere in $\overline{Z}$ seu omne X erit Z, unde et $\overline{X}$ cadet in $\overline{Z}$, quod erat demonstrandum.

(27) Hic ergo specimen calculi habuimus non inelegans ad praescriptum § 4. Nempe quia $X.\overline{Z} \simeq X.\overline{Z}$, quod est identicum, et $X.C \simeq X.D$ ex hypothesi, et $\overline{Z}.C$ $\overline{Z}.D$, quod probatum de-

dimus ex natura rectae, ex his binionibus omnibus singulatim respective congruentibus sequitur congruere et conflatas inde terniones seu conjungendo esse $X.\bar{Z}.C \simeq X.\bar{Z}.D$.

(28) Hinc si $X.C \simeq X.D$, erit $\bar{X}$ *recta*, quae congruentia permagnae est utilitatis in calculo nostro. Et vicissim si $\bar{X}$ sit recta, oportet existere puncta qualia C et D, ut locum habeat congruentia.

(29) Fieri nequit, ut recta eodem modo se habeat ad tria plani puncta seu ut sit $X.C \simeq X.D \simeq X.E$ (fig. 73). Nam si hoc esset, foret conjungendo $X.C.E \simeq X.D.E$, ergo E non potest esse ab alterutro latere. Sed idem E non potest esse in $\bar{X}$, ita enim etiam C et D forent in $\bar{X}$, et hoc amplius, coinciderent cum E, alioqui punctum aliquod rectae (nempe ipsum E) se aliter haberet ad C et ad D quam ad E, ergo punctum E praeter C et D nuspiam reperiri potest.

(30) Circulus circulo non occurrit in pluribus quam duobus punctis. Sint duae circumferentiae circulares $\bar{X}$ et $\bar{Z}$ (fig. 74), dico eas non posse secare nisi in duobus punctis, velut L et M. Nempe ipsius $\bar{X}$ centrum sit A, ipsius $\bar{Z}$ centrum sit B. Quia jam L est X et M est X, erit $L.A \simeq M.A$, et quia L est Z et M est Z, erit $L.B \simeq M.B$, utrumque ex natura circumferentiarum, quibus puncta sunt communia per § 25. Ergo conjungendo $L.A.B \simeq M.A.B$. Sit $\bar{Y}$ recta per A.B, utique etiam $L.\bar{Y} \simeq M.\bar{Y}$ per axiom. § 3; sed si daretur praeterea aliud duabus circumferentiis commune punctum N, haberemus $L.\bar{Y} \simeq M.\bar{Y} \simeq N.\bar{Y}$, seu recta $\bar{Y}$ se eodem modo haberet ad tria puncta L, M, N, quod fieri nequit per praecedentem. Hinc sequitur, tribus datis punctis circumferentiam, cui insint, esse determinatam, cum pluribus simul inesse non possint.

(31) Si circulus circulum tangat (fig. 75), punctum contactus in eadem est recta cum centris. Centra sunto A et B, et punctum contactus C, ubi scilicet duo puncta occursus coalescunt. Itaque (per praecedentem) circulus circulo praeterea non occurrit, alioqui forent puncta occursus tria. Punctum ergo contactus duobus circulis solum commune est. Ajo, id esse in recta per A.B. Quod patebit per § 19, si ostendatur, esse suae ad A.B relationis unicum. Esto aliud, si fieri potest, F et debet esse $F.A.B \simeq C.A.B$; ergo divellendo et $F.A \simeq C.A$, itemque $F.B \simeq C.B$; ergo F cadet

in ambas circumferentias, atque adeo vel coincidet cum C, vel C non erit solum commune, quod est absurdum.

(32) Recta et circulus non possunt sibi occurrere in plus quam duobus punctis. Sint L et M (fig. 76) in recta $\overline{X}$, itemque in circumferentia $\overline{Z}$ circa C, dico praeter L et M non posse dari punctum N. Sumatur D eodem modo se habens ad rectam $\overline{X}$, ut C ab altera parte per § 17. Ob circulum est $L.C \simeq M.C \simeq N.C$, ergo quia puncta L, M, N sunt in recta eodem modo se habente ad D, quo ad C, etiam erit $L.D \simeq M.D \simeq N.D$; ergo conjungendo $L.C.D \simeq M.C.D \simeq N.C.D$. Sit $\overline{Y}$ recta per C.D, ergo (per axiom. § 3.) fiet $L.\overline{Y} \simeq M.\overline{Y} \simeq N.\overline{Y}$, seu recta $\overline{Y}$ se eodem modo habebit ad tria puncta L, M, N, quod fieri nequit per § 29.

Atque ita fundamentalia rectae et circuli exposuimus, quomodo scilicet occurrere sibi possint haec loca: recta rectae, circulus circulo, recta circulo, quorum occursibus caetera determinantur. Unde consequens est, caetera quoque calculo nostro tractari posse.

III.

DE ANALYSI SITUS.

Quae vulgo celebratur *Analysis Mathematica*, est *magnitudinis,* non *situs*; atque adeo directe quidem et immediate ad Arithmeticam pertinet, ad Geometriam autem per circuitum quendam applicatur. Unde fit, ut multa ex consideratione situs facile pateant, quae calculus Algebraicus aegrius ostendit. Problemata Geometrica ad Algebram, id est quae figuris determinantur ad aequationes revocare, res non raro satis prolixa est, et rursus alia prolixitate difficultateque opus est, ut ab aequatione ad constructionem, ab Algebra ad Geometriam redeatur, saepeque hac via non admodum aptae prodeunt constructiones, nisi feliciter in quasdam non praevisas suppositiones assumtionesve incidamus. Hoc ipse Cartesius tacite fassus est, cum lib. 3 Geometriae suae problema quoddam Pappi resolvit. Et sane Algebra sive numerica sive speciosa addit, subtrahit, multiplicat, dividit, radices extrahit, quod utique arithmeticum est. Nam ipsa Logistica, seu scientia magnitudinis proportionisve in universum, nihil aliud tractat quam numerum generalem seu indeterminatum et has in eo species