I.

CHARACTERISTICA GEOMETRICA. *)

(1) *Characteres* sunt res quaedam, quibus aliarum rerum inter se relationes exprimuntur, et quarum facilior est quam illarum tractatio. Itaque omni operationi, quae fit in characteribus, respondet enuntiatio quaedam in rebus: et possumus saepe ipsarum rerum considerationem differe usque ad exitum tractationis. Invento enim quod quaeritur in characteribus, facile idem invenietur in rebus per positum ab initio rerum characterumque consensum. Ita machinae exhiberi possunt modulis, corpora solida repraesentari possunt in plana tabula, ita ut nullum sit punctum corporis, cui non respondens aliud designari possit in tabula secundum leges perspectivae. Itaque si quam operationem geometricam scenographica ratione in tabula plana super imagine rei peregerimus, poterit eventus illius operationis exhibere punctum aliquod in Tabula, cui facile sit invenire punctum respondens in re. Ac proinde solutio problematum stereometricorum in plano peragi poterit.

(2) Quanto autem characteres sunt exactiores, id est quo plures rerum relationes exhibent, eo majorem praestant utilitatem, et si quando exhibeant omnes rerum relationes inter se, quemadmodum faciunt characteres Arithmetici a me adhibiti, nihil erit in re, quod non per characteres deprehendi possit: Characteres autem Algebraici tantum praestant quantum Arithmetici, quia significant numeros indefinitos. Et quia nihil est in Geometria, quod non possit exprimi numeris, cum scala quaedam partium aequalium exposita est, hinc fit, ut quicquid Geometricae tractationis est, etiam calculo subjici possit.

(3) Verum sciendum est, easdem res diversis modis in characteres referri posse, et alios aliis esse commodiores. Ita Tabula, in qua corpus arte perspectiva delineatur, potest et gibba esse, sed praestat tamen usus tabulae planae; et nemo non videt, charac-

*) Das Manuscript ist datirt: 10. Augusti 1679.

teres numerorum hodiernos, quos Arabicos vel Indicos vocant, aptiores esse ad calculandum, quam veteres Graecos et Romanos, quanquam et his calculus peragi potuerit. Idem et in Geometria usu venit; nam characteres Algebraici neque omnia, quae in spatio considerari debent, exprimunt (Elementa enim jam inventa et demonstrata supponunt) neque situm ipsum punctorum directe significant, sed per magnitudines multa ambage investigant. Unde fit, ut difficile sit admodum, quae figura exhibentur exprimere calculo; et adhuc difficilius, calculo inventa efficere in figura: itaque et constructiones, quas calculus exhibet, plerumque sunt mire detortae et incommodae; quemadmodum alibi ostendi exemplo problematis hujus: Data basi, altitudine et angulo ad verticem invenire Triangulum. *)

(4) Equidem animadverto, Geometras solere descriptiones quasdam figuris suis adjicere, quibus explicentur figurae, ut quae ex figura ipsa satis cognosci non possunt, ut linearum aequalitates ac proportionalitates, saltem ex verbis adjectis intelligantur: plerumque et longius progrediuntur, et multa verbis exponunt, etiam quae ex figura ipsa sunt manifesta, tum ut ratiocinatio sit severior nihilque a sensu atque imaginatione pendeat, sed omnia rationibus transigantur, tum ut figurae ex descriptione delineari aut, si forte amissae sint, restitui possint. Hoc autem quamvis non satis exacte observent, praebuere tamen nobis Characteristicae Geometricae velut vestigia quaedam, ut cum Geometrae dicunt (fig. 31) rectang. ABC, intelligunt factum ex ductu AB super BC ad angulos rectos; cum dicunt AB aequ. BC aequ. AC, exprimunt Triangulum aequilaterum; cum dicunt ex tribus AB, BC, AC duo quaedam aequari tertio, designant omnia tria A, B, C esse in eadem recta.

(5) Ego vero cum animadverterem, hoc solo literarum puncta figurae designantium usu nonnullas figurae proprietates posse designari, cogitare porro coepi, an non omnes punctorum figurae cujusque relationes iisdem literis ita designari possint, ut tota figura characteristice exhibeatur, et quae crebris linearum ductibus vix ac ne vix quidem praestantur, sola harum literarum collocatione ac transpositione inveniantur. Nam plerumque confusio oritur in figura ex multiplicibus linearum ductibus, praesertim cum adhuc tentandum est, cum contra tentamenta characteribus impune fiant

*) Siehe die Beilage zu dieser Abhandlung.

Sed subest aliquid majus, nam poterimus characteribus istis veras definitiones omnium exprimere, quae sunt Geometricae tractationis, et analysin ad principia usque, nempe axiomata et postulata, continuare, cum Algebra sibi non sufficiat, sed propositionibus per Geometriam inventis uti cogatur, et dum omnia ad duas illas propositiones, quarum una duo quadrata in unum addit, altera vero triangula similia comparat, referre conatur, pleraque a naturali ordine detorquere cogatur.

(6) Nos vero ubi semel Elementa characteribus nostris demonstraverimus, facile poterimus modum deprehendere inveniendi problematum solutiones, quae statim eadem opera exhibeant constructiones et demonstrationes lineares, cum contra Algebraici, inventis valoribus incognitarum, de constructionibus adhuc soliciti esse debeant, et constructionibus repertis demonstrationes lineares quaerant. Itaque miror homines non considerasse, si demonstrationes et constructiones esse possunt lineares, omni calculo exutae, multoque breviores, profecto etiam inventionem dari debere linearem: nam in lineari non minus quam algebraica Synthesi regressum dari necesse est. Causa autem, cur analysis linearis nondum deprehensa fuerit, haud dubie nulla alia est, quam quod Characteres nondum inventi sunt, quibus ipse situs punctorum directe repraesentaretur, nam in magna rerum multitudine et confusione sine characteribus expedire sese difficile est.

(7) Quod si jam semel figuras et corpora literis exacte repraesentare poterimus, non tantum Geometriam mirifice promovebimus, sed et opticen, et phoronomicam, et mechanicam, in universum quicquid imaginationi subjectum est, certa methodo et veluti analysi tractabimus, efficiemusque arte mirifica, ut machinarum inventiones non sint futurae difficiliores quam constructiones problematum Geometricae. Ita etiam nullo negotio sumtuque machinae etiam valde compositae, imo et res naturales delineari poterunt sine figuris, ita ut posteritati transmittantur, et quandocunque lubebit, figurae ex descriptione summa cum exactitudine formari possint, cum nunc quidem ob delineandarum figurarum difficultatem sumtusque multa pereant, hominesque a rerum sibi exploratarum atque reipublicae utilium descriptione deterreantur, verba etiam neque satis exacta neque satis apta hactenus ad descriptiones concinnandas habeantur, quemadmodum vel ex botanicis et armorum insigniumque explicatoribus patet. Poterunt enim caeterae

quoque qualitates, quibus puncta, quae in Geometria ut similia considerantur, inter se differunt, facile sub characteres vocari. Ac profecto tum demum aliquando spes erit penetrandi in naturae arcana, cum id omne, quod alius vi ingenii et imaginationis ex datis extorquere potest, nos ex iisdem datis certa arte securi et tranquilli educemus.

(8) Cum vero nihil tale cuiquam hominum, quod sciam, in mentem venerit, nec ulla uspiam praesidia apparerent, coactus sum rem a primis initiis repetere, quod quam difficile sit nemo credit nisi expertus. Itaque diversis temporibus plus decies rem aggressus sum diversis modis, qui omnes erant tolerabiles et praestabant aliquid, sed scrupulositati meae non satisfaciebant. Tandem multis resectis ad simplicissima me pervenisse agnovi, cum nihil aliunde supponerem, sed ex propriis characteribus omnia ipse demonstrare possem. Diu autem haesi etiam reperta vera characteristicae hujus ratione, quia ab Elementis per se facilibus atque aliunde notis incipiendum mihi videbam, quae tanta scrupulositate ordinare minime gratum esse poterat; perrexi tamen et molestia hac superata denique ad majora sum eluctatus.

(9) Verum ut omnia ordine tractemus, sciendum est primam esse considerationem ipsius *Spatii*, id est Extensi puri absoluti: *puri,* inquam, a materia et mutatione, *absoluti* autem, id est illimitati atque omnem extensionem continentis. Itaque omnia puncta sunt in eodem spatio, et ad se invicem referri possunt. An autem spatium hoc a materia distinctum res quaedam sit, an solum apparitio constans seu phaenomenon, nihil refert hoc loco.

(10) Proxima est consideratio *Puncti*, id est ejus quod inter omnia ad spatium sive extensionem pertinentia simplicissimum est; quemadmodum enim Spatium continet extensionem absolutam, ita punctum exprimit id quod in extensione maxime limitatum est, nempe simplicem situm. Unde sequitur punctum esse minimum et partibus carere, et omnia puncta congruere inter se (sive coincidere posse) adeoque et similia atque si ita loqui licet, aequalia esse.

(11) Si duo puncta simul existere sive percipi intelligantur, eo ipsa consideranda offertur relatio eorum ad se invicem, quae in aliis atque aliis binis punctis diversa est, nempe relatio loci vel situs quem duo puncta ad se invicem habent, in quo intelligitur eorum distantia. Est autem *distantia* duorum nihil aliud, quam

quantitas minima unius ad alterum viae, et si bina puncta A . B servato situ inter se, binis aliis punctis C . D etiam situm inter se servantibus simul congruant aut succedere possint, utique situs sive distantia horum duorum eadem erit, quae distantia illorum. Nam congrua sunt quorum unum alteri coincidere potest, nulla intra alterutrum mutatione facta. Coincidentium autem A . B itemque C . D eadem distantia est, ergo et congruorum, quippe quae sine distantiae intra A . B vel intra C . D mutatione facta, possunt coincidentia reddi.

(12) *Via* autem (qua et distantiam definivimus) nihil aliud est quam locus continuus successivus. Et via puncti dicitur *Linea*. Unde et intelligi potest, extrema lineae esse puncta, et quamlibet lineae partem esse lineam sive punctis terminari. Est autem via continuum quoddam, quia quaelibet ejus pars extrema habet cum alia anteriori atque posteriori parte communia. Unde consequitur, ut hoc obiter addam, si linea quaedam in aliqua superficie ducatur, non posse aliam lineam in eadem superficie continue progredientem inter duo prioris lineae extrema transire, quin priorem secet.

(13) Via lineae ejusmodi, ut puncta ejus non semper sibi invicem succedant, *Superficies* est; et via superficiei, ut puncta ejus non semper sibi invicem succedant, est *Corpus*. Corpus autem moveri non potest, quin omnia ejus puncta sibi succedant (quemadmodum demonstrandum est suo loco) et ideo novam dimensionem non producit. Hinc apparet nullam esse partem corporis, cujus ambitus non sit superficies, nullamque esse partem superficiei, cujus ambitus non sit linea. Patet etiam extremum superficiei pariter atque corporis in se redire sive esse *ambitum* quendam.

(14) Assumtis jam duobus punctis, eo ipso determinata est via puncti per unum pariter atque alterum simplicissima possibilis: alioqui eorum distantia non esset determinata, adeoque nec situs. Haec autem linea quae a duobus solis punctis, per quae transit, determinata est ita nimirum, ut posito eam per duo data puncta transire, ipsa sola hinc consideranda offeratur, ea inquam linea dicitur *recta*, et licet utcunque producatur, dicitur una eademque recta. Ex quibus sequitur, non posse duo eadem puncta duabus rectis communia esse, nisi eae duae rectae quantum satis est productae coincidant: ac proinde duas rectas non habere segmentum commune (alioqui et duo segmenti hujus extrema haberent com-

munia) nec spatium claudere sive componere ambitum in se redeuntem, alioqui recta una ab altera digressa ad ea rediret, adeoque in binis punctis ei occureret. Pars quoque rectae est recta, nam et ipsa determinatur per duo illa puncta sola, per quae sola determinatur totum: determinatur, inquam, id est omnia ejus puncta consideranda seu percurrenda ex sola duorum punctorum consideratione offeruntur. Ex his patet, si A.B.C et A.B.D congrua sint, et A.B.C in una recta esse dicantur, coincidere C et D. Seu si punctum tantum unicum sit, quod eam habeat ad duo puncta relationem, quam habet, erunt tria puncta in una recta. Contra si plura duobus sint puncta eodem modo se habentia ad tria vel plura puncta data, erunt haec quidem in eadem recta, illa extra eam, cujus rei ratio est, quod quae ad determinantia eodem modo se habent, eo ipso ad determinata eodem modo se habent, itaque tria plurave puncta in eadem recta haberi possunt pro duobus. Puncta autem eodem modo se habentia requiro plura duobus (nam si sint duo tantum, res procedit, modo tria, ad quae unumquodque duorum eodem modo se habet, sint in eodem plano, licet non sint in eadem recta).

Recta quoque uniformis est ob simplicitatem, seu partes habet toti similes. Et omnis recta rectae similis est, quia pars unius alteri congrua est; pars autem rectae toti similis. Et in recta distingui non potest concavum a convexo, sive recta non habet duo latera dissimilia, vel quod idem est, si duo puncta sumantur extra rectam, quae eodem modo se habeant ad extrema rectae vel ad duo quaelibet puncta in recta, ea sese etiam eodem modo habebunt ad totam rectam, seu ad quodlibet punctum in recta, a quocunque demum latere rectae illa duo extra rectam puncta sumantur. Cujus rei ratio est, quia quae ad puncta determinantia aliquod extensum eodem se habent modo, ea etiam ad totum extensum eodem modo se habere necesse est. Denique recta a puncto ad punctum minima est, ac proinde distantia punctorum nihil aliud est quam quantitas rectae interceptae. Nam via minima utique magnitudine determinata est a solis duobus punctis; sed et positione determinata est, neque enim in spatio absolute plures minimae a puncto ad punctum esse possunt (ut in sphaerica superficie plures sunt viae minimae a polo ad polum). Nam si minima est absolute, extrema non possunt diduci manente lineae quantitate, ergo nec Partium extrema (nam et partes inter sua extrema minimas esse necesse est) salva singularum partium quantitate, ergo nec salva totius quantitate. Jam si lineae duo extrema maneant immota et linea ipsa transformetur, necesse est puncta ejus aliqua a se invicem diduci. Itaque extremis rectae immotis, salva quantitate minima inter duo puncta, in aliam transformari non potest, itaque non dantur plures minimae incongruae dissimiles inter duo puncta. Quare si duae inter duo puncta essent minimae, essent congruae inter se. Jam una aliqua minima est recta (ut supra ostendimus), ergo et alia minima erit recta; at duae rectae inter duo puncta coincidunt; itaque minima inter duo puncta non nisi unica. est.

(15) Modus generandi lineam rectam simplicissimus hic est. Sit corpus aliquod, cujus duo puncta sint immota et fixa, ipsum autem corpus nihilominus moveatur, tunc omnia puncta corporis quiescentia incident in rectam, quae per duo puncta fixa transit. Manifestum enim est, ea puncta eundem locum habere ex datis duobus punctis fixis determinatum, seu manentibus duobus punctis fixis et toto solido existente, moveri non posse, cum caetera extra rectam, eadem servata ad duo puncta fixa relatione, locum mutare possint. Unum hic incommodum est, quod ea recta hoc modo descripta non est permanens. Aliter generari potest linea recta, si qua detur linea flexilis, sed quae in majorem longitudinem extendi non possit. Nam si extrema ejus diducantur quousque id fieri potest, linea flexilis in rectam erit transmutata. Eodem modo et plani ac Circuli et Trianguli proprietates ex constitutis definitionibus naturali quodam meditandi ordine duci possent. Nam de linea recta in specimen tantum disseruimus.

(16) Haec omnia animo consequi non difficile est, etsi neque figurae nisi imaginatione delineentur, neque characteres adhibeantur alii quam verba, sed quia in ratiocinationibus longe productis neque verba, ut hactenus concipi solent, satis exacta sunt, nec imaginatio satis promta, ideo figuras hactenus adhibuere Geometrae. Sed praeterquam quod saepe delineantur difficulter, et cum mora quae cogitationes optimas interea effluere sinit, nonnunquam et ob multitudinem punctorum ac linearum schemata confunduntur, praesertim cum tentamus adhuc et inquirimus; ideo characteres sequenti modo cum fructu adhiberi posse putavi.

(17) Spatium ipsum seu extensum (id est continuum cujus partes simul existunt) non aliter hic quidem designari commode posse video quam punctis. Quoniam figurarum delineationes exacte

10 *

exacte exprimere propositum est, et in his nonnisi *puncta* et *tractus quidam continui* ab uno puncto ad aliud spectantur, in quibus puncta infinita pro arbitrio sumi possunt, ideo puncta quidem certa exprimemus literis solis ut A, item B (fig. 32).

(18) Tractus autem continuos exprimemus per puncta quaedam incerta sive arbitraria, ordine quodam assumta, ita tamen ut appareat semper alia tum intra ipsa tum ultra citraque semper posse sumi. Ita ${}_{3}b\,{}_{6}b\,{}_{9}b$ (fig. 33) significabit nobis totum tractum, cujus quodlibet punctum appellatur b, et in quo pro arbitrio assumsimus partes duas, unam cujus extrema sunt puncta ${}_{3}b$, ${}_{6}b$, alteram cujus extrema sunt puncta ${}_{6}b$, ${}_{9}b$. Unde patet illas duas partes continuas esse, cum habeant commune punctum ${}_{6}b$, et divisio earum sit facta pro arbitrio. Hic tractus, in quo duarum partium commune extremum nullum aliud est quam punctum, dicitur *Linea* et repraesentari etiam potest motu puncti *b*, quod viam quandam percurrit, sive vestigia tot quot puncta diversa ${}_{3}b$, ${}_{6}b$, ${}_{9}b$ etc. relinquere intelligitur. Hinc linea dici potest via puncti. Via autem est locus puncti continuus successivus. Potest et per compendium designari hoc modo: Linea $\overline{y}b$, designando per literam $\overline{y}$ vel aliam numeros ordinales pro arbitrio sumtos collective; cum vero scribemus: ${}_{y}b$ sine nota supra y, intelligemus quodcunque lineae $\overline{y}b$ punctum distributive.

Eodem modo tractus quidam fingi possunt, quorum partes cohaerent lineis, vel qui describi intelliguntur motu lineae tali ut puncta ejus non succedant sibi, sed ad nova loca deveniant. Hic tractus sive via lineae dicitur *superficies*. Ponamus nimirum (fig. 34) lineam supradictam ${}_{3}b\,{}_{6}b\,{}_{9}b$ moveri, ejusque locum unum appellari $3_{3}b\; 3_{6}b\; 3_{9}b$, locum alium sequentem $6_{3}b\; 6_{6}b\; 6_{9}b$ et rursus alium sequentem $9_{3}b\; 9_{6}b\; 9_{9}b$, fiet superficies $3_{3}b\; 3_{6}b\; 3_{9}b$, $6_{3}b\; 6_{6}b\; 6_{9}b$, $9_{3}b\, 9_{6}b\; 9_{9}b$, quam et per compendium sic designabimus: $\overline{zy}b$.

(19) Ubi patet etiam, quemadmodum motu lineae $\overline{y}b$ secundum puncta $\overline{z}b$ describitur superficies $\overline{zy}b$, ita vicissim motu lineae $\overline{z}b$ secundum puncta $\overline{y}b$ describi eandem superficiem $\overline{yz}b$. At *zyb* significabit unaquaeque loca puncti b non collective, sed distributive, et $z\overline{y}b$ significat unam aliquam lineam $\overline{y}b$ in superficie $\overline{zy}b$ sumtam quamcunque etiam non collective, sed distributive.

(20) Neque refert, cujus figurae sint ipsae lineae quae moventur, aut etiam secundum quas fit motus, sive quas unum ex lineae motae punctis describit; inspiciatur fig. 35. Potest etiam

fieri, ut durante motu ipsa linea mota figuram mutet, ut linea $\overline{z}b$ in dicta fig. 35, quod clarius intelligi potest, si quis cogitet quam superficiem descripturus esset arcus, qui durante explosione utcunque moveretur totus, exempli causa si caderet in terram. Potest etiam linea mota durante motu partes aliquas amittere, quae ab ea sive re sive animo separantur, ut patet ex fig. 36. Fieri etiam potest, ut punctum unum plurave, exempli gratia $_3b$ in linea mota durante motu quiescat, et loca ejus expressa velut plura, exempli gratia 3_3b, 6_3b, 9_3b, inter se coincidant, ut intelligitur inspecta fig. 37. Sed hae varietates omnes multaeque aliae plures etiam characteribus designari poterunt, quemadmodum suo loco patebit.

(21) Quemadmodum autem lineae motu describitur Tractus ille quem vocant superficiem, ita superficiei motu (tali ut partes ejus vel puncta sibi non ubique succedant) describitur Tractus quem vocant Solidum sive corpus. Quod exemplo uno satis intelligi potest (fig. 38), ut si immota manente linea (recta) (nempe $3_3b\ 6_3b\ 9_3b$) in superficie (rectangulo) $\overline{zy}b$ (nempe $\left\{\begin{matrix} 3_3b\ 6_3b\ 9_3b \\ 3_6b\ 6_6b\ 9_6b \\ 3_9b\ 6_9b\ 9_9b \end{matrix}\right\}$ moveatur haec ipsa superficies, motu suo describet solidum

$$\left\{\begin{matrix} 33_3b\ 33_6b\ 33_9b,\ 36_3b\ 36_6b\ 36_9b,\ 39_3b\ 39_6b\ 39_9b \\ 63_3b\ 63_6b\ 63_9b,\ 66_3b\ 66_6b\ 66_9b,\ 69_3b\ 69_6b\ 69_9b \\ 93_3b\ 93_6b\ 93_9b,\ 96_3b\ 96_6b\ 96_9b,\ 99_3b\ 99_6b\ 99_9b \end{matrix}\right\}$$

ubi tamen notandum, hoc loco ob rectam $\overline{z}_3b$ immotam puncta 33_3b, 63_3b, 93_3b (ideoque loco omnium in figura reperitur solum 3_3b) coincidere, itemque puncta 36_3b, 66_3b, 96_3b, unde etiam figura habetur tantum 6_3b; ac denique cum eodem modo hic coincidant puncta 39_3b, 69_3b, 99_3b, tantum per 9_3b expressa sint. Hoc solidum autem per compendium exprimemus hoc modo: $\overline{xz}yb$, et aliquam ejus superficiem seu locum aliquem ipsius $\overline{zy}b$ exprimemus hoc modo $\overline{zy}b$ (ita exhibetur sectio cylindricae portionis seu solidi hujus facta plano per axem): potest etiam aliqua ejus superficies assumi hoc modo $z\overline{xy}b$ (ita exhibetur sectio hujus portionis cylindricae secundum basin seu plano basi parallelo); item hoc modo $y\overline{xz}b$ (ita exhibetur sectio hujus cylindricae portionis per alium cylindrum axem cum isto communem habentem). Aliae quoque sectiones ejusdem Figurae intelligi possunt, quia infiniti etiam fingi possunt modi eam generandi per motum vel etiam resolvendi in partes secundum certam aliquam legem. Caeterum omnes varietates, quas in superficiei productione vel resolutione paulo ante indicavimus, multo magis in solido locum habere manifestum est. Denique dimensionem aliquam altiorem solido seu tractum ipsius solidi motu tali descriptum, ut puncta ejus sibi ubique non succedant, reperiri non posse, suo loco demonstrandum est.

(22) Porro tractus ipsi seu loca punctorum quorundam indefinitorum determinantur punctis quibusdam certis, itemque Legibus quibusdam, secundum quas ex paucis illis punctis certis caetera puncta indefinita ordine in considerationem venire, et tractus ipsi generari sive describi possint. Quod antequam exponamus, signa quaedam explicabimus, quibus in sequentibus utendum erit. Primum itaque fieri potest, ut duo vel plura nomina in speciem diversa non sint revera nisi unius rei sive loci, id est puncti vel lineae alteriusve tractus, atque ita *eadem esse* sive *coincidere* dicentur. Ita (fig. 39) si sint duae lineae AB et CD, sintque puncta A et C unum idemque, hoc ita designabimus: $A \infty C$, id est A et C coincidunt. Hoc maxime usum habebit in designandis punctis aliisque extremis communibus diversorum Tractuum. Idem enim punctum sive extremum suas denominationes habebit, tam secundum unum tractum, quam secundum alterum. Quod si dicatur (fig. 40) $A.B \infty C.D$, sensus erit simul esse $A \infty C$ et $B \infty D$, idemque est in pluribus; ab utraque enim enunciationis parte idem ordo est observandus.

(23) Quodsi duo non quidem coincidant, id est non quidem simul eundem locum occupent, possint tamen sibi applicari, et sine ulla in ipsis per se spectatis mutatione facta alterum in alterius locum substitui queat, tunc duo illa dicentur esse *congrua*, ut A.B et C.D in fig. 39; itaque fiet: $A.B \between C.D$; item $A.B \between C.D$ in fig. 40, id est servato situ inter A et B, item servato situ inter C et D, nihilominus C.D applicari poterit ipsi A.B, id est simul applicari poterit C ipsi A et D ipsi B.

(24) Si duo extensa non quidem congrua sint, possint tamen congrua reddi sine ulla mutatione molis sive *quantitatis*, id est retentis omnibus iisdem punctis, facta tantum quadam si opus est transmutatione sive transpositione partium vel punctorum; tunc dicentur esse *aequalia*. Ita in fig. 41 Quadratum ABCD et Triangulum isosceles EFG basin habens EG lateri AB quadrati duplam, aequalia sunt: nam transferatur FHG in EGF, quia $EGF \between FHG$, fiet EFG aequ. EHFG; jam $EHFG \between ABCD$, ergo EFG aequ. ABCD.

Hinc generalius, si a ȣ b et b ȣ d, erit $a + b \sqcap$ (sive aequ.) $c + d$; imo amplius: si a ȣ c, b ȣ f, c ȣ g, d ȣ h, fiet $a + b - c + d \sqcap e + f - g + h$; sive si duae fiant summae ex quibusdam partibus uno eodemque modo addendo vel subtrahendo, partesque unius sint congruae partibus alterius eodem modo ad totum constituendum concurrentibus, quaelibet unius summae uni alterius summae sibi ordine respondenti; tunc duae summae quae inde fient, non quidem semper congruae erunt, erunt tamen semper aequales. Atque ita argumentatio a congruis ad aequalia ipsa aequalium definitione constituitur; sunt quidem alias *aequalia*, quorum eadem est magnitudo. Verum ipsa partium congruentium cuidam rei sive mensurae multitudo est magnitudo, ut si sint in fig. 42 duo magnitudinem habentia a et b, et detur res tertia c, quae sit bis a + ter b, patet ejus magnitudinem multitudine partium tum ipsi a tum ipsi b congruentium exprimi, itaque quae congrua reddi possunt nullo addito vel detracto, utique aequalia esse necesse est.

(25) Verum ut rem istam altius repetamus, explicandum est, quid sit pars et totum, quid homogeneum, quid magnitudo, quid ratio. *Pars* nihil aliud est quam requisitum totius diversum (seu ita ut alterum de altero praedicari nequeat) immediatum, in recto cum correquisitis. Ita AB (fig. 43) requisitum est ipsius AC, id est si non esset AB, neque foret AC; diversum quoque est, neque enim AC est AB; alioqui enim rationalis est requisitum hominis, sed quia homo est rationalis, ideo rationalis (qui hominis requisitum est) et homo idem est, etsi enim expressione differant, re tamen conveniunt. Pars immediatum est requisitum, neque enim connexio inter AB et BC pendet a quadam consequentia sive connexione causarum, sed ipsa per se patet, ex hypothesi assumti totius. Est autem in recto cum correquisitis, semper enim convenire debent secundum certum quendam considerandi modum, nam et quae ut Entia tantum, imo et ut cogitabilia spectamus, verbi gratia DEUM, hominem, virtutem, possumus considerare velut partes unius totius ex ipsis compositi. Excluduntur ergo requisita immediata quidem et diversa, ut rationalitas in abstracto, quae requisitum est hominis immediatum diversum; neque enim nec homo est rationalitas, attamen non hic spectatur ut conveniens cum homine, sed ut attributum: alioqui sane negari non potest, etiam ex his duobus: homo et rationalitas, fingi posse unum totum, cujus hae partes. At rationalitas hominis pars non erit, requiritur enim

ad hominem in obliquo, seu non convenienti quadam ratione cum aliis, quae ad hominem praeterea requiruntur. Sed haec sunt magis metaphysica nec nisi in eorum gratiam adducuntur, qui notionum intima intelligere desiderant. Simplicius ita definiemus: *Partes* sunt quae requiruntur ad unum quatenus cum eo conveniunt.

(26) *Numerus* est, cujus ad unitatem relatio est quae inter partem et totum vel totum et partem, quare fractos etiam et surdos comprehendo.

(27) *Magnitudo* Rei distincte cognita est numerus (vel compositum ex numeris) partium rei cuidam certae (quae pro mensura assumitur) congruentium. Ut si sciam esse lineam, quae bis aequetur lateri, ter aequetur diagonali cujusdam quadrati certi mihique satis cogniti, ut ad ipsum cum lubet recurrere possim, ejus lineae magnitudo mihi cognita esse dicetur, quae erit binarius partium lateri congruentium, ternarius partium diagonali congruentium. Diversis autem licet assumtis mensuris, quibus eadem res diversimode exprimitur, tamen semper eadem prodit magnitudo, quia ipsis mensuris iterum resolutis ad idem denique semper devenitur, adeoque mensurae diversae illum ipsum numerum eundem resolutione prodeuntem jam involvunt. Quemadmodum unus idemque est numerus tres quartae et sex octavae, si quartam iterum in duas partes resolvas. Atque talis est Magnitudo distincte cognita. Alioquin *Magnitudo* est attributum rei, per quod cognosci potest, utrum aliqua res proposita sit illius pars, vel aliud homogeneum ad rem pertinens et quidem tale ut maneat, licet partium habitudo inter se mutetur. Vel etiam Magnitudo est attributum, quod iisdem manentibus homogeneis ad rem pertinentibus aut substitutis congruis, manet idem. Homogenea autem ad rem aliquam pertinentia intelligo non partes solum, sed et extrema atque minima sive puncta Nam puncti repetitione quadam continua sive motu fit linea. Saepe autem res ita transmutantur, ut ne unica quidem pars figurae posterioris, prioris parti congruat. Aliter Magnitudinem infra definio, ut sit id, quo duae res similes discerni possunt, sive quod in rebus sola comperceptione discernitur. Sed omnia haec eodem recidunt.

(28) *Ratio ipsius A ad B* nihil aliud est quam numerus, quo exprimitur magnitudo ipsius A, si magnitudo ipsius B ponatur esse unitas. Unde patet, Magnitudinem a ratione differre ut numerum concretum a numero abstracto; est enim magnitudo numerus rerum, nempe partium, ratio vero est numerus unitatum,

Patet etiam rei magnitudinem eandem manere, quacunque assumta mensura per quam eam exprimere volumus; rationem vero aliam atque aliam fieri pro alia atque alia mensura assumta. Patet etiam (ex definitione divisionis) si numerus magnitudinem exprimens ipsius A et alius numerus magnitudinem exprimens ipsius B (modo utrobique eadem mensura seu unitas adhibita sit) dividatur, provenire numerum qui est ratio unius ad alterum.

(29) *Aequalia* sunt quorum eadem est magnitudo, seu quae nullo amisso vel accepto congrua reddi possunt. *Minus* dicitur quod alterius parti aequale est, id vero quod partem habet alteri aequalem, dicitur *Majus*. Hinc pars minor toto, quia parti ipsius, nempe sibi, aequalis est. Signis autem his utemur:

$a \sqcap b$ a aequ. b

$a \ulcorner b$ a maj. quam b

$a \urcorner b$ a min. quam b

Si pars unius alteri toti aequalis est, reliquae partis in majore magnitudo dicitur *differentia*. Magnitudo autem totius est *summa* magnitudinum partium, vel aliorum partibus ejus aequalium.

(30) Si duo sint homogenea (sive si in uno partes assumi possint utcunque partibus alterius aequales, et idem fieri semper possit et in residuis) neque differentia ulla sit inter ipsa, id est si neque a sit majus quam b, neque b majus quam a, necesse est esse aequalia. Transmutentur enim ut congruant quoad licet, utique aut in uno eorum superrerit aliquid, aut congruent, adeoque erunt aequalia. Itaque in his consequentia haec valebit:

a non $\ulcorner$ *b. a non* $\urcorner$ *b. Ergo a* $\sqcap$ *b.*

(31) *Similia* sunt quae singula per se considerata discerni non possunt, velut duo triangula aequilatera (in fig. 44), nullum enim attributum, nullam proprietatem in uno possumus invenire, quam non etiam possimus reperire in altero; et unum ex ipsis appellando a, alterum b, *similitudinem* ita notabimus: $a \sim b$. Si tamen simul percipiantur, statim discrimen apparet, unum alio esse majus. Idem fieri potest, etsi non simul percipiantur, modo aliquod velut medium assumatur sive mensura quae primum applicetur uni, aut aliquo in ipso, notatoque quomodo prius vel pars ejus cum mensura vel ejus parte congruat, postea eadem mensura etiam applicetur alteri. Itaque dicere soleo, *similia* non discerni nisi per comperceptionem. At, inquies, ego etsi successive videam duo Triangula aequilatera inaequalia, ea nihilominus probe discerno.

Sed sciendum est', me hoc loco loqui de intelligentia, ut nimirum mens aliquid notare possit in uno, quod non procedat in altero, non de sensu et imaginatione. Ratio autem, cur oculi duas res similes, sed inaequales discernant, manifesta est; nam supersunt nobis rerum prius perceptarum imagines, quae rei nove perceptae imaginibus applicatae discrimen ipsa comperceptione harum duarum imaginum ostendunt. Et ipse fundus oculi, cujus partem majorem minoremque occupat imago, mensurae cujusdam officium facit. Denique alias res semper simul percipere solemus, quas etiam cum prioribus percepimus, unde rem novissime perceptam ad eas referendo, ut priorem ad easdem retulimus, discrimen non difficulter notamus. Si vero fingeremus, DEUM omnia in nobis ac circa nos in aliquo cubiculo apparentia proportione eadem servata minuere, omnia eodem modo apparerent neque a nobis prior status a posteriore posset discerni, nisi sphaera rerum proportionaliter imminutarum, cubiculo scilicet nostro egrederemur; tunc enim comperceptione illa cum rebus non imminutis oblata discrimen appareret. Hinc manifestum est etiam, *Magnitudinem* esse illud ipsum quod in rebus **distingui** potest sola comperceptione, id est applicatione vel **immediata**, sive congruentia actuali sive coincidentia, vel mediata, nempe interventu mensurae, quae nunc uni nunc alteri applicatur, unde sufficit res esse congruas, id est actu congruere posse.

(32) Ex his autem intelligi potest, similia et aequalia simul esse congrua. Et quia similitudinem hoc signo notare placet: $\backsim$ nempe $a \backsim b$, id est a est simile ipsi b, vid. fig. **44**, hinc consequentia erit talis:

$$a \backsim b \textit{ et } a \sqcap b, \textit{ ergo } a \text{♉} b.$$

(33) Sunt et aliae consequentiae:

$$a \text{♉} b, \textit{ ergo } a \sqcap b.$$
$$a \text{♉} b, \textit{ ergo } a \backsim b.$$
$$a \infty b, \textit{ ergo } a \text{♉} b$$
$$\ldots\ldots\ldots \; a \sqcap b$$
$$\ldots\ldots\ldots \; a \backsim b$$

(34) Nam quae reapse coincidunt, utique congrua sunt; quae congrua sunt, utique similia, item aequalia sunt. Hinc videmus, tres esse modos ac velut gradus res extensione praeditas neque alias qualitatibus diversas discernendi. Maximus ille est, ut sint dissimiles; ita enim singulae per se spectatae ipsa proprieta-

tum quae in ipsis observantur diversitate facile discernuntur: ita triangulum isosceles facile discernitur a scaleno, etsi non simul videantur. Si quis enim me jubeat videre, an triangulum quod offertur sit isosceles an scalenum, nihil forinsecus assumere necesse habeo, sed sola latera ejus comparo inter se. At vero si jubear ex duobus Triangulis aequilateris eligere majus, collatione Triangulorum cum aliis opus habeo, sive comperceptione, ut explicui, neque notam aliquam discriminis in singulis spectabilem assignare possum. Si vero duae res non tantum sint similes, sed et aequales, id est si sint congruae, etiam simul perceptas non discernere possum, nisi loco, id est nisi adhuc aliud assumam extra ipsas, et observem ipsas diversum habere situm ad tertium assumtum. Denique si ambo simul in eodem sint loco, jam nihil habere me amplius quo discriminentur. Atque haec est vera cogitationum quam de his rebus habemus Analysis, cujus ignoratio fecit, ut characteristica geometriae vera hactenus non sit constituta. Ex his denique intelligitur, ut magnitudo aestimatur, dum res congruere aut ad congruitatem reduci posse intelliguntur, ita rationem aestimari similitudine, seu dum res ad similitudinem reducuntur; tunc enim omnia fieri necesse est proportionalia.

(35) Ex his explicationibus coincidentium, congruorum, aequalium ac similium consequentiae quaedam duci possunt. Nempe quae sunt eidem aequalia, similia, congrua, coincidentia, sunt etiam inter se, ideoque

$$
\begin{array}{llll}
a \infty b & \text{et} \quad b \infty c, & \text{ergo} & a \infty c \\
a ♉ b & \quad\;\; b ♉ c & & a ♉ c \\
a \sim b & \quad\;\; b \sim c & & a \sim c \\
a \sqcap b & \quad\;\; b \sqcap c & & a \sqcap c
\end{array}
$$

Non tamen consequentia haec valet:

$$a \text{ non } \infty\, b \text{ et } b \text{ non } \infty\, c, \text{ ergo } a \text{ non } \infty\, c,$$

prorsus ut in Logica ex puris negativis nihil sequitur.

(36) Si coincidentibus sive iisdem ascribas coincidentia, prodeunt coincidentia, ut

$$a \infty c \ \textit{et}\ b \infty d,\ \textit{ergo}\ a \,.\, b \infty c \,.\, d.$$

Sed in congruis hoc non sequitur, exempli causa si A.B.C.D sint puncta, semper verum est esse A ♉ C, et B ♉ D; quodlibet enim punctum cuilibet congruum est, sed non ideo dici potest A.B ♉ C.D, id est simul congruere posse A ipsi C et B ipsi D, servato nimirum tum situ A.B, tum situ C.D. Quanquam vice-

versa ex positis A . B ∞ C . D sequatur A ∞ C et B ∞ D ex significatione characterum nostrorum, idque etiam verum est, licet A.B.C.D non sint puncta, sed magnitudines. At si congrua sibi ascribantur, inde oriuntur aequalia, ita:
$a + b - c \sqcap d + e - f$, posito esse $a \infty d$, et $b \infty e$, et $c \infty f$, quia congrua semper aequalia sunt.

(37) Verum si congrua congruis similiter addantur adimanturque, fient congrua. Cujus rei ratio est, quia si congrua congruis similiter addantur, similia similibus similiter addentur (quia congrua sunt similia), ergo fient similia, fiunt autem etiam aequalia (nam congrua congruis addita faciunt aequalia); jam similia et aequalia sunt congrua, ergo *si congrua congruis similiter addantur, fient congrua.* Idem est, si adimantur.

(38) An autem similiter aliqua tractentur, intelligi potest ex characteristicis nostris modoque unumquodque describendi aut determinandi, in quo si sigillatim nullum discrimen notari potest, utique semper omnia similia prodire necesse est. Illud quoque notandum est, *si qua sint similia secundum unum determinandi* (distincte cognoscendi, describendi) *modum*, *eadem fore similia etiam secundum alium modum.* Nam unusquisque determinandi modus totam rei naturam involvit.

(39) Axiomata autem illa, quibus Euclides utitur, si aequalibus addas aequalia, fient aequalia, aliaque id genus, facile ex eo demonstrantur, quod aequalium eadem est magnitudo, id est quod substitui sibi possunt salva magnitudine. Nam sint *$a \sqcap c$ et $b \sqcap d$, fiet $a + b \sqcap c + d$,* nam si scribatur a + b et in locum ipsorum a, b substituantur aequalia c, d, ea substitutio fiet salva magnitudine, ac proinde eorum quae prodibunt + c + d eadem erit magnitudo quae priorum + a + b. Sed haec ad calculum Algebraicum potius pertinent, satisque explicata habentur, itaque regulis magnitudinum ac rationum atque proportionum non immorabor; sed ea maxime explicare nitar, quae situm involvunt.

(40) Redeo nunc ad ea quae §. 22 interrupta sunt, et primum de punctis, inde de tractibus agam. Omne punctum puncto congruum adeoque aequale (si ita loqui licet), et simile est:

$$A \infty B, \quad A \sqcap B, \quad A \sim B.$$

(41) *A . B ∞ C . D* significat, simul esse A ∞ C et B ∞ D, manente situ A . B et C . D (fig. 40).

(42) *A . B ∞ B . A* est Propositio cujus est sensus, positis

duobus punctis A . B ac situm eundem inter se retinentibus, posse loca eorum permutari, seu poni A in locum B, et contra (fig. 45). Quod ex eo manifestum est, quia relatio situs quam habent ad ambo eodem modo pertinet, nec nisi externis assumtis discrimen ullum notari potest facta permutatione.

(44) *Si A . B ♉ D . E, et B . C ♉ E . F, et A . C ♉ D . F, erit A . B . C ♉ D . E . F* (fig. 47). Nam nihil aliud significat A . B ♉ D . E, quam simul esse A ♉ D et B ♉ E, situ A . B et D . E servato; eodem modo ex B . C ♉ E . F sequitur B ♉ E et C ♉ F, situ B . C et E . F servato; et ex A . C ♉ D . E sequitur A ♉ D et C ♉ F, situ A . C et D . E servato. Habemus ergo simul A . B . C ♉ D . E . F, servato situ A . B et B . C et A . C, itemque servato situ D . E et E . F et D . F, cum alias ex solis A . B ♉ D . E et B . C ♉ E . F sequatur quidem simul A ♉ D et B ♉ E et C ♉ F, sed servatis tantum sitibus A . B et B . C, item D . E et E . F, non vero exprimetur servari et situs A . C et D . F, nisi addatur A . C ♉ D . F.

Hinc jam principium habemus ratiocinationem ad plura etiam puncta producendi.

(43) *A . B* ♉ X . *Y* est Propositio significans, datis duobus punctis A et B posse reperiri alia duo X et Y, quae eundem inter se situm habeant quem illa duo, sive ut haec simul illis duobus servato situ utrobique congruere possint. Quod ex eo demonstratur, quia L . M moveri possunt servato situ inter se, eaque respondere poterunt primum ipsis A . B, deinde ipsis X . Y, nempe $_3L\,.\,_3M$ ♉ $_6L\,.\,_6M$; sit A ∞ $_3L$, B ∞ $_3M$, X ∞ $_6L$, Y ∞ $_6M$, fiet A . B ♉ X . Y. Nihil autem prohibet esse X ∞ A: unde fiet *A . B* ♉ *A . Y*; potest etiam esse X ∞ C datae, unde A . B ♉ C . Y.

(45) *Si sit A . B ♉ B . C ♉ A . C, erit A . B . C ♉ B . A . C*, vel alio ordine quocunque (fig. 48). Nam si congruentibus A . B et (B) . (A) ascribas congruentia C et (C) congruenti modo, quia A . C ♉ (B) . (C) et B . C ♉ (A) . (C), fient congruentia A . B . C ♉ (B) (A) (C) sive A . B . C ♉ B . A . C per praecedentem; parentheses enim tantum confusionis ex repetitione vitandae causa ascripsi. Hinc patet, quid sit congruenti modo ascribi, cum scilicet omnes combinationes ab una parte enuntiationis sunt congruentes omnibus ab altera parte. Unde patet, *si A . B ♉ B . C ♉ A . C, fore A . B . C ♉ A . C . B ♉ B . C . A ♉ B . A . C ♉ C . A . B ♉ C . B . A.*

(46) *Si A . B . C ♉ A . C . B, sequitur (tantum) A . B ♉ A . C* (fig. 49) [sive triangulum esse isosceles], nam sequitur:

A.B.C, A.B ♉ A.C, B.C ♉ C.B, A.C ♉ A.B
A.C.B

ex quibus B.C ♉ C.B per se patet; reliqua duo A.B. ♉ A.C et A.C ♉ A.B eodem recidunt; hoc unum ergo inde duximus A.B ♉ A.C.

(47) *Si A.B.C ♉ B.C.A, sequitur A.B ♉ B.C ♉ A.C,* [seu triangulum esse aequilaterum]. Nam fit A.B ♉ B.C, B.C ♉ C.A.

(48) *Si A.B.C ♉ A.C.B et B.C.A ♉ B.A.C, fiet A.B ♉ B.C ♉ A.C.* Nam ob A.B.C ♉ A.C.B fit A.B ♉ A.C, eodemque modo ob B.C.A ♉ B.A.C fit B.C ♉ B.A sive A.B ♉ B.C.

[Itaque quandocunque in transposito punctorum ordine unum ex tribus eundem in utroque ordine locum servat, situsque posterior priori congruus est, inde tantum probari potest Triangulum esse isosceles, sed si nullum ex punctis servat locum, et nihilominus situs posterior priori congruit, Triangulum est aequilaterum].

(49) *Si sit A.B ♉ B.C ♉ C.D ♉ D.A et A.C ♉ B.D, erit A.B.C.D ♉ B.C.D.A ♉ C.D.A.B ♉ D.A.B.C ♉ D.C.B.A ♉ A.D.C.B ♉ B.A.D.C ♉ C.B.A.D* (fig. 50).

Hoc ex praecedentibus facile demonstratur, multaque alia hujusmodi, quae sufficiet demonstrari, cum ipsis indigebimus. Nunc satis habebimus principium dedisse inveniendi haec solo calculo, sine inspectione figurae.

(50) Si tria puncta A.B.C (fig. 51) dicantur esse *sita in directum*, tunc posito A.B.C ♉ A.B.Y, erit C ∞ Y. Haec Propositio est definitio punctorum, quae in directum sita dicuntur. Nimirum inspiciatur fig. 51, ubi C aliquem situm habet ad A et B; sumatur jam aliquod punctum Y eundem ad A.B situm habens; id si diversum ab ipso C, assumi potest puncta A.B.C non sunt in directum sita, si vero necessario cum ipso C coincidit, in directum sita dicentur.

(51) Datis punctis duobus semper assumi potest tertium, quod cum illis sit in directum, sive si A.B.Y ♉ A.B.X, erit Y ∞ X.

Nam datis punctis duobus A.B semper assumi potest tertium Y, quod servato ad ipsa situ moveri potest ipsis immotis. Sed via, quam motu suo describit, potest esse semper minor ac minor, prout aliter atque aliter assumitur punctum Y, adeoque tandem sumi poterit tale, ut spatium motus evanescat, et tunc tria puncta erunt in directum. Melius forte sic enuntiabimus: A.B.$_3$Y 8 A.B.$_6$Y, erit $_3$Y ∞ $_6$Y, id est aliquod assignari posse Y, quod servato situ ad A.B moveri seu locum mutare nequeat. Aliter ista videor demonstrare posse hoc modo: Sit aliquod extensum, quod moveatur servato punctorum ejus situ inter se et duobus in eo sumtis punctis immotis. Nam si quis id neget moveri posse, eo ipso fatetur, puncta ejus servato ad puncta duo sumta situ moveri nequire, et adeo cum eo sita esse in directum per definitionem. Sed nulla ratio est, cur puncta illa A.B immota durante eodem motu sumi possint haec sola, et non alia etiam, sive nulla ratio est, cur puncta extensi, quod his duobus immotis movetur, servent situm ad haec duo solum immota, et non etiam ad alia, nam situs, quem ipsa A.B inter se obtinent, nihil ad rem facit; itaque potuisset sumi aliquod Y loco ipsius B alium obtinens situm ad A quam ipsum B obtinet. Verum quaecunque sumi possunt ut immota, ea manente eodem extensi motu sunt immota. Et quia sumtis duobus A.B immotis motus extensi est determinatus, seu determinatum est, quaenam puncta ejus moveantur aut non moveantur; hinc duobus punctis sumtis immotis, determinata sunt alia plura, quae servato ad ipsa situ moveri non possunt, seu quae cum ipsis jacent in directum.

(52) ***Si sit E.A.B* 8 *F.A.B*, *et E.B.C* 8 *F.B.C*, *erit E.A.C* 8 *F.A.C***, vid. fig. 52.

Nam per E.A.B 8 F.A.B erit E.A 8 F.A,
et per E.B.C 8 F.B.C erit E.C 8 F.C.
Jam si sit E.A 8 F.A et E.C 8 F.C, erit
$\widehat{E.A\ C}$ 8 $\widehat{F.A.C}$ per prop. 44. (est enim
E.A 8 F.A. et E.C 8 F.C et A.C 8 A.C);
ergo si sit E.A.B 8 F.A.B et E.B.C 8 F.B.C, erit E.A.C 8 F.A.C. Quod erat demon.

(53) ***Hinc etiam erit E.A.B.C* 8 *F.A.B.C*, *posito E.A.B* 8 *F.A.B et E.B.C* 8 *F.B.C*.** Nam etiam E.A.C 8 F.A.C per praeced.; habemus ergo: E.A.B 8 F.A.B

et E.A.C ȣ F.A.C et E.B.C ȣ F.B.C et A.B.C ȣ A.B.C, id est habemus omnia, quae ex hoc: E.A.B.C ȣ F.A.B.C duci possunt; ergo habemus etiam E.A.B.C ȣ F.A.B.C [est egregius modus regrediendi, nimirum ex consequentibus omnibus totam naturam antecedentis exhaurientibus ad antecedens.]

(54) *Si sit E.A* ȣ *F.A*, *E.B* ȣ *F.B*, *E.C* ȣ *F.C*, *erit E.A.B.C* ȣ *F.A.B.C;* nam quae supersunt combinationes utrinque comparandae A.B et B.C et A.C, utrobique coincidunt.

(55) *A.B.X* ȣ *A.B.Y* seu datis duobus punctis A.B, inveniri possunt duo alia X.Y, ita ut X et Y eodem modo se habeant ad A.B, vid. fig. 53. Potest enim reperiri A.X ȣ A.Y, et B.Z ȣ B.V per prop. 43. Ponatur Z ∞ X (hoc enim fieri potest per prop. 43, seu Z potest esse data seu jam assumta X, quia A.B ȣ A.V) itemque ponatur A.X ȣ B.X. (nam et in A.X ȣ A.Y potest X esse data, quia datur A.C ȣ A.Y per prop. 43), erit V.B (ȣ B.Z ȣ B.X ȣ A.X) ȣ A.Y; ergo V.B.X ȣ Y.A.X ȣ X.B.V, in quo omnia hactenus determinata continentur. Ergo potest poni V ∞ Y, nihil enim in hactenus determinatis obstat, fiet

Y.B.X ȣ Y.A.X; ergo Y.B ȣ Y.A, B.X ȣ A.X.

Rursus Y.B.X ȣ X.B.Y, ergo Y.B ȣ X.B.

Ergo fit: Y.B ȣ X.B ȣ Y.A ȣ A.X; ergo A.B.X ȣ A.B.Y.

(56) Si tria puncta E.F.G sumta distributive eodem modo se habeant ad tria puncta A.B.C sumta collective, erunt tria priora in eodem arcu circuli, tria posteriora in eadem recta seu jacebunt in directum.

Hanc propositionem annotare placuit; ratio patebit ex sequentibus.

(57) Si sit E.A.B.C ȣ F.A.B.C ȣ G.A.B.C, et sit E non ∞ F, E non ∞ G, F non ∞ G, dicentur *puncta quotcunque A.B.C. sita esse in directum* seu esse in eadem recta (fig. 54).

(58) Omisso licet puncto C, si sit: E.A.B ȣ F.A.B ȣ G.A.B, erunt puncta E.F.G in *eodem plano.*

(59) Iisdem positis erunt puncta E.F.G in eodem *arcu circuli.*

(60) Inter duo quaevis congrua assumi possunt infinita alia congrua, nam unum in locum alterius servata forma sua transire non posset, nisi per congrua.

(61) Hinc a quolibet puncto ad quodlibet punctum duci potest linea. Nam punctum puncto congruum est.

(62) Hinc et a quolibet puncto per quodlibet punctum duci potest linea.

(63) Linea duci potest, quae transeat per puncta quotcunque data.

(64) Eodem modo ostendetur, per lineas quotcunque datas transire posse superficiem. Nam si congruae sunt, patet lineam generantem successive in omnibus esse posse. Si congruae non sunt, patet lineam generantem, durante motu, ita augeri, minui et transformari posse, ut dum illuc venit, congrua fiat.

(65) Unumquodque in spatio positum potest servata forma sua, seu cuilibet in spatio existenti infinita alia congrua assignari possunt.

(66) Unumquodque servata forma sua moveri potest infinitis modis.

(67) Unumquodque ita moveri potest servata forma sua, ut incidat in punctum datum. Generalius: unumquodque servata forma sua ita moveri potest, ut incidat in aliud, cui congruum in ipso designari potest. Nam congruum unum transferri potest in locum alterius, nec quicquam prohibet id, in quo congruum illud est quod transferri debet, simul cum ipso transferri, quia ratio separationis nulla est: et quod uni congruorum aptari potest, poterit et alteri congruorum similiter aptari.

(68) A ♉ B, id est assumto puncto quodlibet aliud congruum est.

(69) A.B ♉ B.A, ut supra.

(70) A.B ♉ X.Y; eodem modo A.B.C ♉ X.Y.Z, et A.B.C.D ♉ X.Y.Z.Ω, et ita porro. Hoc enim nihil aliud est, quam quotcunque puncta posse moveri servato situ inter se; situm autem eorum inter se servari intelligi potest, si ponatur esse extrema lineae cujusdam rigidae qualiscunque.

(71) A.B ♉ C.X, A.B.C ♉ D.X.Y etc. Hoc enim nihil aliud est, quam quotcunque puncta, ut A.B.C, posse moveri servato situ inter se, ita ut unum ex ipsis A incidat in punctum

aliquod datum D, reliquis duobus B.C in alia quaecunque X.Y incidentibus.

(72) Si A.B.C non ♉ A.B.Y, nisi C ∞ Y, tunc puncta A.B.C dicuntur *sita in directum* (vid. fig. 51) seu *C erit situm in directum cum ipsis A.B*, si unicum sit quod eum situm ad A.B habeat. An autem talis punctorum situs reperiatur, postea inquirendum erit. Linea autem, cujus omnia puncta sita sunt in directum, dicetur *recta.* Sit enim A.B.$_z$Y ♉ A.B.$_z$X, atque ideo $_z$Y ∞ $_z$X, erit $\overline{{}_zY}$ (∞ $\overline{{}_zX}$) *Linea recta*, id est, si punctum Y ita moveatur, ut situm semper ad puncta A.B servet, qui ipsi uni competere possit, sive determinatum minimeque varium ac vagum, describi ab eo lineam rectam.

(73) Si A.B.C ♉ A.B.D, erit ♉ A.B.$_z$Y, vid. fig. 55. Nam erit C ∞ $_3$Y et D ∞ $_6$Y, nempe C et D erunt loca ipsius Y moti ita ut servet situm eundem ad A.B, inter quae necessario erunt indefinita, nempe designanda per $_z$Y. Linea autem $\overline{{}_zY}$ vocetur *circularis.* Notandum autem, hanc Lineae circularis descriptionem ea priorem esse, quam dedit Euclides; Euclidea enim indiget recta et plano. A nostra procedit, qualiscunque assumatur rigida linea, modo in ea duo sumantur puncta, quibus immotis ipsa linea vel saltem aliquod ejus punctum moveatur; hoc enim punctum ad puncta duo assumta eundem servabit situm, cum omnia sint in linea rigida. Id ergo punctum describet lineam circularem per hanc definitionem nostram. Si quis vero neget, in Linea rigida tale punctum inveniri posse, quod datis duobus immotis moveatur, necesse erit per definitionem praecedentem prop. 72. omnia Lineae rigidae puncta in directum esse sita, sive necesse erit dari Lineam rectam. Alterutrum ergo hoc modo admittere necesse est, lineam rectam possibilem esse, vel circularem. Alterutra autem admissa, alteram postea inde ducemus. Hic obiter notandum, quia, ut suo loco patebit, per tria quaelibet data puncta transire potest arcus circularis, hinc tribus datis punctis inveniri unum posse, quod ad tria illa eodem se habeat modo, nempe X.C ♉ X.D ♉ X.E, idque saepius fieri posse seu diversa reperiri posse X pro iisdem C.D.E, omniaque X in unam rectam cadere, quae transeat per circuli centrum, sitque ad planum ejus ad angulos rectos.

(74) Sit Linea quaelibet $\overline{{}_zY}$, vid. fig. 55, in ea poterunt sumi quotcunque puncta $_3$Y.$_6$Y.$_9$Y.$_{12}$Y etc. ita ut sit

${}_{3}Y.{}_{6}Y \infty {}_{6}Y.{}_{9}Y \infty {}_{9}Y.{}_{12}Y$ etc. Nam generaliter, si qua sit linea satis parva, cujus unum extremum sit in alia linea, poterit prior ita moveri, extremo ejus duabus lineis communi immoto, ut altero quoque extremo posteriori lineae occurrat, itaque hoc motu partem unam abscindet, jamque novo puncto invento immoto manente rursus aliam, et ita porro. Sed jam observo, ne id quidem necesse esse, et sufficere Unam lineam eidem lineae suis extremis applicari saepius quomodocunque, ita ut plures ejusdem lineae partes assignentur, quarum extrema aliorum extremis sint congrua, ut in fig. 56 linea rigida LM suis extremis L et M ipsi lineae $\overset{\frown}{Z}Y$ aliquoties in ${}_{1}Y.{}_{2}Y$ et ${}_{3}Y.{}_{4}Y$ et ${}_{5}Y.{}_{6}Y$, quae coincident ipsis ${}_{1}L.{}_{1}M$ et ${}_{2}L.{}_{2}M$ et ${}_{3}L.{}_{3}M$, nam si semel $L.M$ ipsi $\overset{\frown}{Z}Y$ applicari possit, infinitis modis applicari potest, si posteriores applicationibus quantumvis parum distent. Jam ex L et M educantur duae lineae congruae eodem modo se habentes, ea quae ex L educitur ad L, quo illa quae ex M educitur ad M, quae sibi occurrant in X, sitque ${}_{1}LX\,{}_{1}M \infty {}_{2}LX\,{}_{2}M$, et ita porro, id est quae ex ${}_{1}L$ et ${}_{1}M$ educuntur, eousque producantur ut non ante sibi occurrant, quam ubi ex ${}_{2}L$, ${}_{2}M$ eodem modo eductae sibi occurrunt. Unde patet, puncta X eodem modo se habere ad omnia Y assignata, et si quidem linea talis est, ut ejusmodi punctum habeat, quod ad omnia ejus puncta eodem sit modo, id hoc modo inveniri. Si autem circularis sit linea, ut hoc loco, sufficit punctum aliquod ad tria lineae circularis puncta se eodem modo habens inveniri, id enim eodem modo se habebit ad alia omnia. Cujus rei ratio est, quia ex tribus punctis datis C.D.E, vid. fig. 55, posito esse $C.D \infty D.E$, methodo paulo ante dicta ad fig. 56, punctum aliquod certum determinari, ac proinde aliis tribus punctis quibuslibet in circulo assumtis, prioribus tribus congruentibus, eodem modo lineas concurrentes congruas ducendo, necesse esse deveniri semper ad idem X. Hinc cum ex tribus datis punctis D.C.E modo diverso inveniri possint puncta X, prout lineae congruentes aliter atque aliter ducuntur, seu citius tardiusque convergunt, patet etiam alia utique inveniri posse puncta X, eaque omnia in unam lineam cadere.

(75) Sed eadem sine circulo simplicius consequi possumus. Sint tria puncta A.B.C (fig. 57), ita ut sit $A.B \infty B.C \infty A.C$, inveniantur que puncta X, ita ut sit $A.X \infty B.X \infty C.X$, idque quoties libet, sive quod idem est, moveatur punctum X, ita ut

quivis ejus locus, ut ${}_zX$, eodem modo se habeat ad A.B.C, id est ut sit A.${}_zX$ ♉ B.${}_3X$ ♉ C.${}_zX$, tunc puncta ${}_zX$ erunt in directum posita, sive $\overline{Z}X$ erit linea recta. Atque ita apparet, quid velit Euclides, cum ait, Lineam rectam ex aequo sua interjacere puncta, id est non subsultare in ullam partem, seu non aliter ad punctum A quam B vel C durante motu se habere. Hinc autem modus quoque habetur puncta X rectae $\overline{Z}X$ inveniendi. Nimirum si ex A linea educatur quaecunque eodem modo se habens ad B et C, itemque alia per B priori congruens et congruenter posita, id est, ut punctum hujus puncto illius respondens eodem modo se habeat ad B.A.C, ut punctum illius ad A.B.C, eaeque lineae producantur, donec sibi occurrant, occurrent sibi necessario in puncto X, quod se habet eodem modo ad A.B.C. Et si per punctum C etiam talis linea ducta fuisset congrua congruenterque prioribus, ea ipsis occurrisset in puncto eodem X. Hinc autem quotvis ejusmodi puncta inveniri possunt adeoque et Linea recta describi poterit per puncta.

(76) Resumamus aliqua: A puncto quolibet ad quodlibet ducta intelligi potest linea, eaque rigida.

(77) A.B significat situm ipsorum A et B inter se, id est tractum aliquem rigidum per A et B, quem tractum nobis sufficit esse lineam. Ita A.B.C significat tractum alium rigidum per A.B.C.

(78) Quicquid in spatio ponitur, id moveri potest, sive punctum sit sive linea, sive alius tractus, sive cuilibet in extenso assignari potest aliud congruum. Hinc A♉X, A.B♉X.Y, A.B.C♉X.Y.Z, vel A.B.C♉$\omega\,\overline{X.Y.Z}$.

(79) Datis duobus diversis in extenso poni potest unum quiescere, alterum moveri.

(80) Si aliquod eorum, quae sunt in tractu rigido, moventur, ipse tractus rigidus movetur.

(81) Omnis tractus ita moveri potest, ut punctum ejus datum incidat in aliud datum, A.B.C ♉ D.X.Y.

(82) Omnis tractus moveri potest uno ejus puncto manente immoto, A.B.C♉A.X.Y.

(83) *Recta* est tractus qui moveri non potest, duobus punctis in eo quiescentibus, sive si quidam tractus moveatur duobus punctis manentibus immotis, si alia praeterea in eo puncta ponantur manere quiescentia, omnia ea puncta dicentur in directum sita, sive cadere in tractum, qui dicitur recta, seu si A.B.C ♉ A.B.Y (fig. 58), necesse est esse C ∞ Y, hoc est si punctum aliquod reperiatur C

situm in directum cum punctis A.B. non potest tractus A.B.C (vel A.C.B) ita moveri manentibus A.B immotis, ut C transferatur in Y, atque ita congruat tractus A.B.Y priori A.B.C, sive quod idem est, non potest praeter punctum C aliud adhuc reperiri Y, quod ad puncta fixa A.B eundem quem ipsum C situm habeat, sed necesse est, si tale quod Y assumatur, ipsum ipsi C coincidere seu esse Y ∞ C. Unde dici potest, punctum C sui ad puncta A.B situs esse exemplum unicum. Et punctum, quod ita moveatur, ut ad duo puncta fixa situm servet in sua specie unicum, movebitur in recta. Nempe si sit A.B.Y 8 A.B.X, sitque ideo Y ∞ X, erit $\overline{\varpi}$ X (∞ $\overline{\varpi}$ Y) linea recta. An autem dentur hujusmodi puncta in directum sita, et an tractum componant, et utrum tractus ille linea sit, non sumendum, sed demonstrandum est. Via autem puncti ita moti utique *linea recta* erit, quae quidem si per omnia puncta hujusmodi transit, utique locus omnium punctorum duobus punctis in directum sumtorum, non alius tractus quam linea erit.

(84) Si duobus in tractu A.C.B punctis A.B manentibus immotis moveatur ipse tractus, linea, quam punctum ejus motum C describet, dicetur *circularis*. An autem possit tractus aliquis moveri duobus punctis manentibus immotis, etiam non sumendum, sed demonstratione definiendum est. A.C.B 8 A.Y.B (fig. 59), dicetur $\overline{\varpi}$ Y linea *circularis*, et si sint quotcunque puncta C.D.E.F, sitque A.B.C 8 A.B.D 8 A.B.E 8 A.B.F, dicentur esse in una eademque circulari. Haec definitio lineae circularis non praesupponit dari rectam et planum, quod facit Euclidis definitio.

(85) Locus omnium punctorum, quae eodem modo se habent ad A, quemadmodum ad B, appellabitur *planum*. Sive si sit A.Y 8 B.Y, erit $\overline{\text{Y}}$ *planum*.

(86) Hinc si sit A.C.B 8 A.Y.B, sitque A.C 8 C.B (adeoque et A.Y 8 B.Y), erit Linea $\overline{\omega\ \text{Y}}$ circularis in plano. An autem omnis circularis sit in plano, postea definiendum est.

(87) Si sint A.B 8 B.C 8 A.C, sitque A.Y8B.Y8C.Y, erit $\overline{\omega\ \text{Y}}$ Linea recta.

(88) Si sit A.Y 8 A.(Y), erit $\overline{\text{Y}}$ superficies *sphaerica*.

[8 significat congruitatem, ∞ coincidentiam. Cum dico A.B 8 A.Y, possem quidem dicere distantiam AB aequari distantiae AY, sed quia postea cum tria vel plura adhibentur, ut A.B.C 8 A.B.Y, non hoc tantum volumus triangulum ABC triangulo ABY aequari, sed praeterea simile esse, id est congruere, ideo signo ♉ potius utor.]

(89) Si sit Y ♉ (Y), erit Locus omnium Y seu $\overline{Y}$ extensum absolutum, sive *Spatium*. Nam locus omnium punctorum inter se congruentium est locus omnium punctorum in universum. Omnia enim puncta congrua sunt.

(90) Idem est si sit Y ♉ A; nam (ex characterum significatione) si Y ♉ A, erit (Y) ♉ A, ergo Y ♉ (Y). Nimirum locus omnium punctorum Y dato puncto A congruorum utique est etiam spatium ipsum interminatum, omnia enim puncta cuilibet dato congruunt.

(91) Proximum est: A.Y ♉ A.(Y), locus omnium Y seu $\overline{Y}$ dicatur *Sphaerica*, quae est locus omnium punctorum ejusdem ad datum punctum situs existentium. Datum autem punctum dicitur *Centrum*.

(92) Idem est si sit A.B ♉ A.Y. Nam ideo erit et A.B ♉ A.(Y) ac proinde A.Y ♉ A.Y, ubi nota, ipsum B esse ex numerorum Y seu esse $_a$Y. Si enim Y omnia puncta comprehendit, quae eum habent situm ad A, quem B habet, utique ipsum B comprehendet, quod eum utique situm ad A habet quem habet. Sphaerica est locus omnium punctorum dati ad punctum datum situs (id est dati puncti situi congrui situs) existentium.

(93) Si sit A.Y ♉ B.Y, locus omnium Y seu $\overline{Y}$ dicatur *planum*, sive locus punctorum ut Y, quorum unumquodque ad unum ex duobus datis punctis A eodem modo situm est, quemadmodum ad alterum B, est *planum*. Notandum est, Loci expressionem in aliam converti non posse, in qua simul sint Y et (Y).

(94) Si sit A.B ♉ C.Y, erit $\overline{Y}$ *sphaerica*. Nam erit A.B ♉ C.Y. ♉ C.$_d$Y; sit $_d$Y ∞ D, fiet C.D ♉ C.Y, adeoque locus erit sphaerica per prop. 91.

(95) Y et (Y) significant quodcunque punctum loci alicujus, et quodcunque aliud praeter prius $_z$Y significat quodlibet punctum loci seu omnia loci puncta distributive. Idem etiam significat Y absolute positum. $_d$Y significat unum aliquod peculiare punctum loci. $\overline{Y}$ significat omnia puncta loci collective, seu totum locum. Si locus sit linea, hoc ita significo $\overline{\omega Y}$; si sit superficies, ita: $\overline{\omega\psi Y}$; si solidum, ita: $\overline{\omega\psi\varphi Y}$.

(96) Si sit A.B.C ♉ A.B.Y (sive si sit A.B.Y ♉ A.B.(Y)), tunc locus omnium Y seu $\overline{Y}$ dicetur *circularis*, id est si plurium

punctorum idem sit situs (vel datus) ad duo data puncta, Locus erit *circularis*.

(97) Si sit A.Y ♉ B.Y ♉ C.Y, tunc Locus omnium Y seu $\overline{Y}$ dicetur *recta*.

(98) Si sit A.B.C.Y ♉ A.B.D.Y, erit $\overline{Y}$ *Planum*, seu si C.D duo puncta eodem modo sint ad tria A.B.Y, erunt haec tria in eodem plano, et si duobus ex his datis A.B quaeratur tertium Y, locus omnium Y erit planum. Ubi patet, ipsa A.B sub Y comprehendi. Demonstrandum est, hunc locum cum altero, qui est prop. 93, coincidere. Hoc ita fiet: C.Y.♉D.Y(1) locus est ad planum per prop. 91. Sint $_3$Y ꝏ A et $_7$Y ꝏ B, erit C.A ♉ D.A(2) et C.B ♉ D.B(3) Ergo fiet A.B.C.Y ♉ A.B.D.Y.*) Nam 1 patet per se, et 2 per (3), et 3 per (1), et 4 per (2), et 5 per se, et 6 per se.

(99) Si sit A.Y ♉ B.Y ♉ C.Y, locus $\overline{Y}$ erit *punctum*, sive Y satisfaciens non erit nisi unicum, sive erit Y ꝏ (Y). Haec propositio demonstranda est.

(100) Habemus ergo loca ad Punctum, ad Rectam, ad Circularem, ad Planum, ad Sphaericam, solis congruentiis mira simplicitate expressa, sed haec partim vera, partim possibilia esse, et cum aliis definitionibus coincidere nostras demonstrandum est.

(101) Si tractus sive extensum quodcunque moveatur uno puncto existente immoto, aliud quodcunque ejus punctum movebitur in Sphaerica. Pono autem ipsum extensum esse rigidum, seu partes situm eundem servare. Habebimus ergo modum inveniendi Sphaericae puncta quotcunque. Potest etiam A.B ♉ A.Y esse data, si tractus transeat per duo puncta A.B. Tractum autem aliquem (sive linea sit sive superficies sive solidum) per duo data puncta ducere, et tractum movere uno puncto immoto, utique in potestate est.

(102) Si per duo data puncta transeant duo tractus congrui

---

*) Leibniz hat A und B, B und C, C und Y, ebenso A und B, B und D, D und Y durch Bogen verbunden und bezeichnet die ersten Verbindungen durch 1, die zweiten durch 2, die dritten durch 3. Ferner hat er A und C, B und Y, ebenso A und D, B und Y durch Bogen verbunden und bezeichnet die ersten Verbindungen durch 4, die letztern durch 5. Endlich hat er noch A und Y auf beiden Seiten durch einen Bogen verbuuden, und nennt die Verbindung 6. Auf auf diese Zahlen bezieht er sich im Folgenden.

congruenter, id est ita ut puncta respondentia in duobus tractibus situs habeant ad duo puncta data, unumquodque ad suum, congruos, moveanturque aut etiam si opus sit crescant congruenter, donec sibi occurrant, loca, in quibus puncta eorum respondentia sibi occurrent, erunt puncta plani illius, quod ad duo puncta data eodem modo se in quolibet puncto suo habere definivimus. Posse autem congruenter moveri, posse congrue ac congruenter produci, donec occurrant, postulo.

(103) Si jam Sphaericam Sphaerica aut plano secemus, habebimus circularem; si planum plano, habebimus rectam; si rectam recta, punctum. Ostendendum autem est has sectiones fieri posse, et punctorum Sphaericae et Sphaericae, vel plano et plano, vel plano et Sphaericae communium esse tractum. Si sphaerica planum vel sphaericam tangat, locus etiam est punctum, cum scilicet circularis fit minima seu evanescit.

Beilage.

Data basi, altitudine et angulo ad verticem, invenire triangulum.

Hoc problema esse potest specimen discriminis inter constructiones per figurae considerationem et constructiones per Algebram inventas.

Sit data basis AB (fig. 60), altitudo CF aequalis datae BD, angulusque ad verticem etiam magnitudine datus, nempe aequalis dato E.

Problema per Algebram ita quaeremus: Ex puncto C quaesito demissa intelligatur perpendicularis CF, ipsi AB basi productae si opus, occurrens in F. Similiter ex aliquo extremo baseos A ducatur AG perpendicularis ad latus oppositum BC, si opus productum.

Ipsas	A B,	B D seu C F,	B C,	A C,	B G,	C G,	A G,	B F
vocabimus	b	d	m	n	x	z	v	y

Denique quia ob angulum C datum ratio $\underset{n}{AC}$ ad $\underset{z}{CG}$ data est, hanc ponamus esse eandem quae q ad r; erit z aequ. $\frac{r}{q}n$ (1)