IX

CHARACTERISTICA GEOMETRICA [1]

(1) *Characteres* [2] sunt res quaedam quibus aliarum rerum inter se relationes exprimuntur, et quarum facilior est quam illarum tractatio. Itaque omni operationi, quae fit in characteribus, respondet enuntiatio quaedam in rebus : et possumus saepe ipsarum rerum considerationem differre usque ad exitum tractationis. Invento enim quod quaeritur in characteribus, facile idem invenietur in rebus per positum ab initio rerum characterumque consensum. Ita machinae exhiberi possunt modulis, corpora solida repraesentari possunt in plana tabula, ita ut nullum sit punctum corporis, cui non respondens aliud assignari [3] possit in tabula secundum leges perspectivae. Itaque si quam operationem geometricam scenographica ratione in tabula plana super imagine rei peregerimus, poterit eventus illius operationis exhibere punctum aliquod in Tabula, cui facile sit invenire punctum

---

1. Date : 10 août 1679. L.H. XXXV, vol. I, Nr. 11, Bl. 1-16. Le fragment *Characteristica Geometrica* a été édité par Gerhardt (MS., V, pp. 141-168) mais sans inclure la partie finale (§ 104 et suivants, f. 16 du manuscrit) ni les ratures ou corrections de Leibniz. Nous présentons une nouvelle transcription du manuscrit en corrigeant quelques petites fautes de Gerhardt.

2. Leibniz a rayé ce début initial : « characterum utilitas in eo consistit ut dum ipsi tractantur, de re quam repraesentant necesse non sit donec sub exitum tractationis quod inventum est in characteribus rursus ad rem ipsam transferatur. »

3. Gerhardt transcrit « designari » au lieu de « assignari ».

IX

CARACTÉRISTIQUE GÉOMÉTRIQUE

1 Les Caractères [1] sont des objets exprimant les relations entre d'autres objets, plus faciles à manier qu'elles. A toute opération sur les caractères correspond donc une proposition portant sur les objets et avant de considérer ceux-ci nous pouvons souvent attendre d'avoir achevé l'opération. Une fois qu'on a obtenu sur les caractères le résultat qu'on cherchait, on le retrouvera aisément sur les objets grâce à la correspondance établie au départ entre les caractères et eux. On peut ainsi décrire des machines par des mouvements réglés, représenter des corps solides sur des tableaux plans et faire en sorte qu'à tout point d'un corps corresponde, conformément aux lois de la perspective, un point dans le plan. Au terme d'une opération géométrique réalisée dans le plan sur la représentation de l'objet par projection scénographique, son résultat pourra désigner un certain point du Plan, dont il sera facile de retrouver le point correspondant dans l'objet. La

---

1. Début rayé : « L'utilité des caractères réside dans le fait que tant qu'on opère sur eux il n'est pas nécessaire de faire intervenir l'objet qu'ils représentent et cela jusqu'au terme de l'opération où le résultat découvert sur les caractères est reporté sur leur objet. »

respondens in re. Ac proinde solutio problematum stereometricorum in plano peragi poterit.

(2) Quanto autem characteres sunt exactiores, id est quo plures rerum relationes exhibent, eo majorem praestant utilitatem, et si quando exhibeant omnes rerum relationes inter se, quemadmodum faciunt characteres Arithmetici a me adhibiti, nihil erit in re quod non per characteres deprehendi possit: Characteres autem Algebraici tantum praestant quantum Arithmetici, quia significant numeros indefinitos. Et quia nihil est in Geometria quod non possit exprimi numeris, cum Scala quaedam partium aequalium exposita est, hinc fit, ut quicquid Geometricae tractationis est, etiam calculo subjici possit.

(3) Verum sciendum est, easdem res diversis modis in characteres referri posse, et alios aliis esse commodiores. Ita Tabula in qua corpus arte perspectiva delineatur potest et gibba esse, sed praestat tamen usus tabulae planae ; et nemo non videt, characteres numerorum hodiernos, quos Arabicos vel Indicos vocant, aptiores esse ad calculandum, quam veteres Graecos et Romanos ; quanquam et his calculi peragi potuerint. Idem et in Geometria usu venit ; nam Characteres Algebraici neque omnia, quae in spatio considerari debent, exprimunt (Elementa enim jam inventa et demonstrata supponunt) neque situm ipsum punctorum directe significant ; sed per magnitudines multa ambage investigant. Unde fit, ut difficile sit admodum, quae figura exhibentur exprimere calculo ; et adhuc difficilius calculo inventa efficere in figura : itaque et constructiones, quas calculus exhibet plerumque sunt mire detortae et incommodae ; quemadmodum alibi ostendi exemplo problematis hujus : data basi, altitudine et angulo ad verticem invenire triangulum.

(4) Equidem animadverto Geometras solere descriptiones quasdam figuris suis adjicere, quibus explicentur figurae, ut quae ex figura ipsa satis cognosci non possunt, ut linearum aequalitates

résolution de problèmes dans l'espace pourra ainsi être menée à bien dans le plan.

2 Les caractères sont en second lieu d'autant plus utiles qu'ils sont plus exacts, c'est-à-dire qu'ils mettent en évidence davantage de relations entre les objets ; lorsqu'ils les indiquent toutes, comme le font les caractères Arithmétiques que j'ai employés, il n'y aura rien dans l'objet qu'ils ne permettront de saisir. Les caractères Algébriques ont néanmoins autant d'utilité que les caractères Arithmétiques dans la mesure où ils représentent des nombres indéterminés. Et comme il n'y a rien en Géométrie qui ne puisse être exprimé par des nombres lorsqu'une Echelle a permis de définir une égalité entre les parties, il s'ensuit que tout ce qu'on peut étudier Géométriquement peut être également assujetti à un calcul [2].

3 Mais il faut savoir qu'il y a différentes façons, plus ou moins commodes, de traduire en caractères les mêmes objets. Rien n'interdit par exemple de dessiner un corps en perspective sur une surface bosselée, bien que l'utilisation d'une surface plane prévale ; qui ne voit d'autre part, même si les anciens chiffres Grecs et Romains permettent également de faire des calculs, que les chiffres Arabes ou Indiens utilisés aujourd'hui y sont plus adaptés ? Le même phénomène s'est introdûit en Géométrie : les Caractères Algébriques en effet n'expriment pas tout ce qu'il y a à étudier dans l'espace (ils supposent que certains Eléments ont déjà été découverts et démontrés [3]), ne représentent pas directement et en elle-même la situation des points et ne l'atteignent qu'au terme d'un grand circuit passant par les grandeurs. Il en résulte qu'il est relativement difficile d'exprimer dans un calcul des choses qui sautent aux yeux sur la figure et plus difficile encore d'en reporter sur elle les résultats ; d'où le caractère généralement très contourné et très incommode des constructions obtenues par le calcul. Je l'ai montré ailleurs en prenant l'exemple du problème suivant : étant donnés la base, la hauteur et l'angle au sommet, trouver le triangle [4].

4 Je note d'ailleurs que les Géomètres ont coutume de compléter leurs figures par des descriptions et des explications afin que ce qui

2. Curieuse justification pour une caractéristique visant précisément à représenter les figures sans utiliser le détour des grandeurs ! L'exemple de la géométrie algébrique permet d'abord à Leibniz de justifier la possibilité générale d'un *calcul* géométrique quel qu'il soit.

3. Cf. supra, II, note 2.

4. Leibniz fait référence à un échantillon ajouté à son manuscrit, publié par Gerhardt, MS., V, 168-171 : « Dati basi, altitudine et angulo ad verticem, invenire triangulum. »

ac proportionalitates, saltem ex verbis adjectis intelligantur : plerumque et longius progrediuntur, et multa verbis exponunt, etiam quae ex figura ipsa sunt manifesta, tum ut ratiocinatio sit severior, nihilque a sensu atque imaginatione pendeat, sed omnia rationibus transigantur ; tum ut figurae ex descriptione delineari aut, si forte amissae sint, restitui possint. Hoc autem quamvis non satis exacte observent, praebuere tamen nobis Characteristicae Geometricae velut vestigia quaedam, ut cum Geometrae dicunt rectang. *ABC*, intelligunt factum ex ductu *AB* super *BC* ad angulos rectos. Cum dicunt *AB aequ. BC aequ. AC*, exprimunt triangulum aequilaterum. Cum dicunt [4] ex tribus *AB. BC. AC.* duo quaedam aequari tertio, designant omnia tria *A. B. C.* esse in eadem recta.

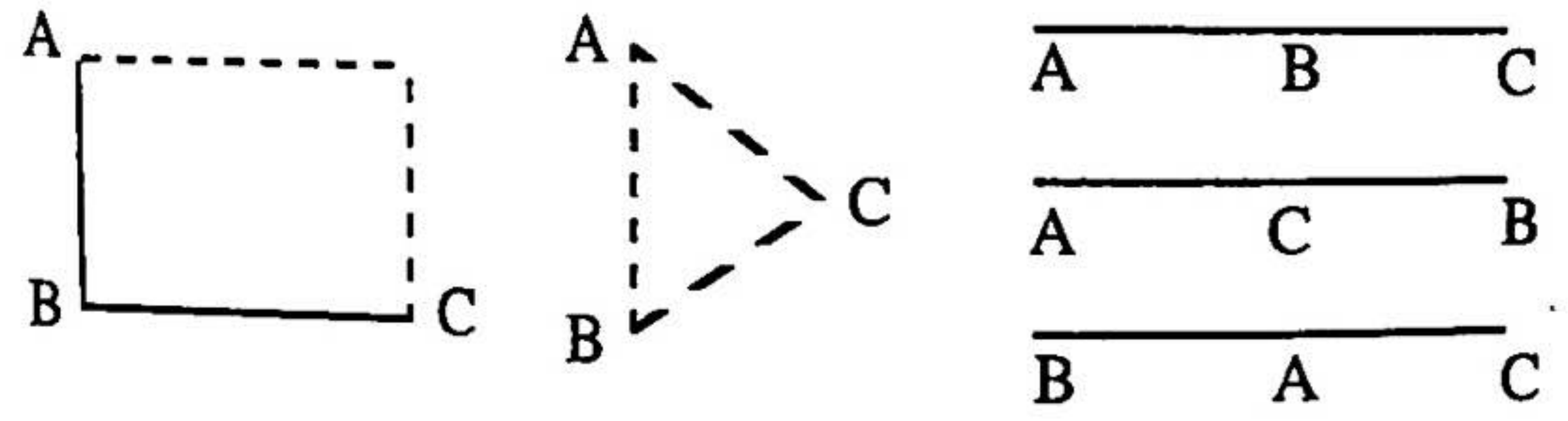


fig. 1-3

(5) Ego vero cum animadverterem, hoc solo literarum puncta figurae designantium [5] usu nonnullas figurae proprietates posse designari ; cogitare porro coepi, an non omnes punctorum figurae cuiusque relationes iisdem literis ita designari possint, ut tota figura characteristice exhibeatur, et quae crebris linearum ductibus, vix ac ne vix quidem praestantur, sola harum literarum collocatione ac transpositione inveniantur. Nam plerumque confusio oritur in figura ex multiplicibus linearum ductibus, praesertim cum adhuc tentandum est [6], cum contra tentamenta characteribus impune fiant. Sed subest aliquid maius, nam poterimus characteribus istis veras definitiones omnium exprimere, quae sunt Geometricae tractationis, et analysin ad principia usque, nempe axiomata et postulata, continuare, cum Algebra sibi non sufficiat, sed propositionibus per Geometriam inventis uti cogatur ; et dum omnia ad duas illas propositiones [7], quarum una

4. Barré ensuite : « *AB + BC aequ. AC* eo ipso designant punc' *A. B. C.* esse in eadem recta. »
5. Barré : « expressio collocatione ».
6. Barré : « solidae tantumque est considerationum multitudo at... »
7. Barré : « pythagoricam et... »

n'est pas visible sur elles, une égalité ou une proportion entre certaines lignes par exemple, le soit à défaut dans le commentaire [5] ; mais ils sont le plus souvent trop prolixes en expliquant beaucoup de choses évidentes sur la seule figure, soit pour rendre le raisonnement plus rigoureux, indépendant des sens et de l'imagination et tout traduire en arguments rationnels, soit pour pouvoir, à partir de leur description, tracer les figures ou les reconstituer si par malchance elles s'égaraient. Or même s'ils ne respectent pas cette règle assez scrupuleusement, ils nous ont ainsi livré comme les bribes d'une Caractéristique Géométrique ; lorsqu'ils disent par exemple *rect. ABC*, ils veulent dire le triangle construit en traçant à angle droit AB sur BC ; lorsqu'ils disent *AB égal BC égal AC*, ils désignent un triangle équilatère ; lorsqu'ils disent [6] que deux des trois segments *AB, BC, AC* sont égaux au troisième, ils veulent dire que les trois points A, B, C sont sur une même droite.

5 Ayant noté que le seul fait de symboliser les points d'une figure par des lettres suffisait à en manifester certaines propriétés [7], j'en suis venu à me demander si toutes les relations liant les points de chaque figure ne pouvaient pas être symbolisées par elles en sorte que la figure soit complètement représentée par une caractéristique et que des résultats qu'on obtient à grand peine en traçant des lignes embrouillées, quand on les obtient, on les découvre simplement en combinant et en transposant des lettres. Car en traçant trop de lignes sur une figure on n'aboutit souvent qu'à la confusion, surtout lorsqu'on en est encore aux essais, lesquels sont au contraire sans conséquence sur les caractères [8]. Mais ceci recèle une chose de plus grande conséquence : ces caractères permettront en effet d'exprimer les vraies définitions de tout ce qui relève de la Géométrie [9] et d'en poursuivre l'analyse jusqu'aux principes, c'est-à-dire jusqu'aux axiomes et aux postulats, alors que l'Algèbre ne se suffisant pas à soi-même, se voit contrainte d'utiliser des propositions établies Géométriquement ; or en prétendant tout ramener à deux propositions : la première portant sur la somme de deux

5. Cf. supra I, note 7.
6. « la formule *AB + BC aequ. AC* marque d'elle-même que les points *A. B. C.* sont alignés. »
7. Notamment les relations de similitude, cf. supra, II, note 3.
8. Cf. par exemple, *Préface à la science générale* : « Il faut donc remarquer que les preuves ou expériences qu'on fait en mathématique pour se garantir d'un faux raisonnement... ne se font pas sur la chose même, mais sur les caractères que nous avons substitués à la place de la chose. » (OP, p. 154).
9. C'est-à-dire des définitions réelles, dévoilant la possibilité de l'objet.

duo quadrata in unum addit, altera vero triangula similia comparat, referre conatur, pleraque a naturali ordine detorquere cogatur.

(6) Nos vero ubi semel Elementa characteribus nostris demonstraverimus, facile poterimus modum deprehendere inveniendi problematum solutiones quae statim eadem opera exhibeant constructiones et demonstrationes lineares ; cum contra Algebraici, inventis valoribus incognitarum, de constructionibus adhuc soliciti esse debeant, et constructionibus repertis demonstrationes lineares quaerant. Itaque miror homines non considerasse, si demonstrationes et constructiones esse possunt lineares, omni calculo exutae, multoque breviores, profecto etiam inventionem dari debere linearem : nam in lineari non minus quam algebraica Synthesi regressum dari necesse est. Causa autem, cur analysis linearis nondum deprehensa fuerit, haud dubie nulla alia est, quam quod Characteres nondum inventi sunt, quibus ipse situs punctorum directe repraesentaretur, nam in magna rerum multitudine et confusione sine characteribus expedire sese difficile est [8].

(7) Quod si jam semel figuras et corpora literis exacte repraesentare poterimus, non tantum Geometriam mirifice promovebimus, sed et opticen, et phoronomicam, et mechanicam [9], in universum quicquid imaginationi subjectum est, certa methodo et veluti analysi tractabimus, efficiemusque arte mirifica, ut machinarum inventiones non sint futurae difficiliores quam constructiones problematum Geometriae. Ita etiam nullo negotio sumtuque machinae etiam valde compositae, imo et res naturales delineari poterunt sine figuris, ita ut posteritati transmittantur, et quandocumque lubebit, figurae ex descriptione summa cum exactitudine formari possint. Cum nunc quidem ob delineandarum figurarum difficultatem, sumtusque multa pereant, hominesque a rerum sibi exploratarum atque reipublicae utilium descriptione deterreantur, verba etiam neque satis exacta neque satis apta hactenus ad descriptiones concinnandas habeantur, quemadmodum vel ex botanicis et armorum insigniumque expli-

8. Barré : « Quod si jam semel quicquid planae solidaeque Geometria char... »

9. Barré : « et textoriam artem, omnia... »

carrés, la seconde sur la comparaison des triangles semblables [10], elle se voit réduite à tout détourner de son ordre naturel.

6 Lorsque nos caractères nous auront fourni, une fois pour toutes, la démonstration des Eléments, il sera facile d'apporter aux problèmes des solutions indiquant, sans autre travail, les constructions et des démonstrations graphiques immédiates ; les Algébristes au contraire, ayant trouvé la valeur des inconnues, doivent encore s'occuper des constructions et ayant trouvé les constructions, chercher les démonstrations graphiques. Il est donc étonnant que personne n'ait observé que l'existence de démonstrations et de constructions graphiques expurgées de tout calcul et beaucoup plus succinctes, doit comporter l'indication immédiate d'une solution graphique. Car la Synthèse graphique implique tout autant l'existence nécessaire d'un retour [11] que la synthèse algébrique. La raison ayant empêché la découverte d'une analyse graphique réside seulement dans le fait qu'on n'a pas encore inventé de caractères capables de représenter directement la situation des points et qu'il est difficile de se sortir d'affaire sans leur aide en présence d'objets multiples et intriqués.

7 Mais dès que nous parviendrons à représenter exactement en lettres les figures et les corps, nous ferons faire un étonnant pas en avant non seulement à la Géométrie mais aussi à l'optique, la phoronomique, la mécanique, et plus généralement à tout ce qui dépend de l'imagination. Nous aborderons ces disciplines par une méthode sûre, pour ainsi dire analytiquement, par suite cette technique merveilleuse nous rendra la mise au point de machines aussi facile que la construction des problèmes de Géométrie. De la sorte, sans peine et sans débours, des machines très complexes, les réalités naturelles elles-mêmes, pourront être décrites et transmises à la postérité sans l'aide de figures. Nous pourrons, aussi souvent que nous le souhaitons, construire les figures avec la plus grande exactitude à partir de leurs descriptions [12], alors qu'à l'heure actuelle nombre de résultats restent sans lendemain du fait de la difficulté et des frais qu'exige le tracé des figures ; les hommes répugnent à décrire les choses d'intérêt général qu'ils ont étudiées, ne disposant pas de mots assez justes ni jusqu'ici suffisamment adaptés à cette fin ; ceux qui étudient les plantes, les

10. Théorèmes de Pythagore et de Thalès, cf. Couturat, *La Logique*, p. 400.

11. *Regressus*. Cf. F. Duchesneau, *Leibniz et la méthode de la science*, p. 79-80 ; cf. NE, IV, XVII, §6.

12. La Caractéristique Géométrique n'est donc qu'une partie du projet général d'une *Characteristica Universalis*, qui serait également applicable, selon Leibniz, à la physique, la biologie et même la technologie. C'est donc une erreur de restreindre la Caractéristique Universelle au domaine de la logique et des sciences formelles.

catoribus patet. Poterunt enim caeterae quoque qualitates, quibus puncta, quae in Geometria ut similia considerantur inter se differunt, facile sub characteribus vocari : Ac profecto tum demum aliquando spes erit penetrandi in naturae arcana, cum id omne, quod alius vi ingenii atque imaginationis ex datis extorquere potest, nos ex iisdem datis certa arte securi et tranquilli educemus.

(8) Cum vero nihil tale cuiquam hominum, quod sciam, in mentem venerit, nec ulla uspiam praesidia apparerent, coactus sum rem a primis initiis repetere, quod quam difficile sit nemo credit nisi expertus. Itaque diversis temporibus plus decies rem agressus sum diversis modis, qui omnes erant tolerabiles et praestabant aliquid, sed scrupulositati meae non satisfaciebant. Tandem multis resectis ad simplicissima me pervenisse agnovi, cum nihil aliunde supponerem, sed ex propriis characteribus omnia ipse demonstrare possem. Diu autem haesi etiam reperta vera characteristica huius ratione, quia ab Elementis per se facilibus atque aliunde notis incipiendum mihi videbam, quae tanta scrupulositate ordinare minime gratum esse poterat ; perrexi tamen et molestia hac superata denique ad majora sum eductatus [10].

(9) Verum ut omnia ordine tractemus sciendum est primam esse considerationem ipsius *Spatii*, id est Extensi puri absoluti. *Puri*, inquam, a materia et [11] mutatione, *absoluti* autem, id est illimitati atque omnem extensionem continentis. Itaque omnia puncta sunt in eodem spatio et ad se invicem referri possunt. An

10. Leibniz a barré ensuite le paragraphe suivant : « Omnia in Geometria punctorum tantum consideratione absolvuntur. Nam et lineae natura ex eo constat, cum punctum eius utcunque assumtum, certam quandam ad data aliquot puncta habet relationem, per quam ex ipsis determinari sive inveniri potest. Superficies autem vel per lineas, vel immediate per puncta cognosci possunt, et corpora per superficies vel lineas vel puncta. Punctorum autem duorum simul existentium consideratio nihil aliud quam situm unius ad alterum sive distantiam continet, vel quod idem est rectam interceptam. »

11. Barré : « mobilitate ».

armes ou les armoiries en fournissent l'exemple. Il nous sera en effet facile d'attacher des caractères à toutes les qualités qui différencient des points semblables d'un point de vue géométrique. L'espoir de pénétrer un jour les secrets de la nature apparaîtra dès que tout le savoir qu'un autre extrairait des données à force d'intelligence et d'imagination, nous le tirerons des mêmes données par une technique fixée, sûre et paisible.

8 Mais puisque rien de tel n'est, que je sache, venu à l'esprit de personne, et qu'aucun secours ne vient de nulle part, me voici contraint de reprendre la chose à ses premiers commencements ; nul ne pourrait croire combien cela est difficile sans s'y être essayé ; je l'ai entrepris plus de dix fois à diverses époques [13], par divers biais tous convenables et féconds en quelque chose, mais qui ne satisfaisaient pas toutes mes exigences. Enfin, après avoir beaucoup élagué pour parvenir au plus simple, j'ai compris que j'avais abouti lorsque, sans rien introduire qui fût extrinsèque, je parvins moi-même à tout démontrer en utilisant des caractères spécifiques. Mais, alors même que j'avais saisi le principe de cette caractéristique, je piétinai longtemps en voyant qu'il me fallait commencer par des Eléments faciles en eux-mêmes et bien connus par ailleurs, mais dont la mise en ordre devait être si soigneuse qu'elle en devenait une tâche ingrate. J'ai cependant poursuivi, j'ai surmonté cette épreuve, je me suis enfin hissé à des résultats plus substantiels [14].

9 Pour traiter tout ceci dans l'ordre, il faut savoir que la première chose à considérer est l'Espace lui-même soit l'Extensum pur et absolu ; en disant pur, je veux dire pur de toute matière et de tout mouvement, en disant absolu je veux parler d'un espace illimité et renfermant toute extension [15]. Tous les points sont ainsi dans le même

13. Référence aux brouillons précédents, dans lesquels Leibniz estime donc avoir obtenu des résultats intéressants ; il n'est pourtant pas tout à fait satisfait de ces essais et reprend la question de la construction de la Caractéristique à son début.

14. Paragraphe barré : « On peut tout résoudre en Géométrie en ne considérant que les points. La nature de la ligne consiste en effet dans le fait qu'un quelconque de ses points possède une relation déterminée à l'égard d'un certain nombre de points donnés, permettant de la déterminer ou de la découvrir. Les surfaces peuvent être connues soit grâce à des lignes, soit directement par des points, et les corps par les surfaces, les lignes ou les points. Or la considération simultanée de deux points ne renferme rien d'autre que le situs, soit la distance, de l'un à l'autre, ou ce qui revient au même, le segment qu'ils interceptent. »

15. Leibniz précise donc ici explicitement que le « bon » point de départ d'un système géométrique est l'espace et non le point. Le fragment VI, dont l'ordre des définitions initiales corrigeait celui du fragment V, tendait à le montrer.

autem spatium hoc a materia distinctum res quaedam sit, an solum apparitio constans seu phaenomenon, nihil refert hoc loco.

(10) Proxima est consideratio *Puncti*, id est eius quod inter omnia ad spatium sive extensionem pertinentia simplicissimum est ; quemadmodum enim Spatium continet extensionem absolutam, ita punctum exprimit id quod in extensione maxime limitatum est, nempe simplicem situm. Unde sequitur punctum esse minimum, et partibus carere, et omnia puncta congruere inter se (sive coincidere posse), adeoque et similia atque, si ita loqui licet, aequalia esse.

(11) Si duo puncta simul existere sive percipi intelligantur, eo ipsa consideranda offertur relatio eorum ad se invicem, quae in aliis atque aliis binis punctis diversa est, nempe relatio loci vel situs quem duo puncta ad se invicem habent, in quo intelligitur eorum distantia. Est autem *distantia* duorum nihil aliud quam quantitas minima unius ad alterum viae, et si bina puncta *A. B.* servato situ inter se, binis aliis punctis *C. D.* etiam situm inter se servantibus, simul congruant aut succedere possint, utique situs sive distantia horum duorum eadem erit quae distantia illorum duorum. Nam congrua sunt quorum unum alteri coincidere potest, nulla intra alterutrum mutatione facta. Coincidentium autem *A.B.* itemque *C.D.* eadem distantia est, ergo et congruorum, quippe quae sine distantiae intra *A.B.* vel intra *C.D.* mutatione facta, possunt coincidentia reddi.

(12) *Via* autem (qua et distantiam definivimus) nihil aliud est quam locus continuus successivus. Et via puncti dicitur *Linea*. Unde et intelligi potest, extrema lineae esse puncta, et quamlibet lineae partem esse lineam, sive punctis terminari [12]. Est autem

12. Barré : « Via autem minima a puncto ad punctum necessario via puncti seu linea est, nam utique via puncti via rei alterique continui extensi minor est sive simplicior est quam via alterius extensi. »

espace et peuvent être rapportés les uns aux autres [16]. Il n'importe pas pour le moment de savoir si cet espace séparé de la matière est une substance ou seulement un phénomène, c'est-à-dire une apparence cohérente [17].

10 La seconde chose à considérer est le *Point*, élément le plus simple parmi tous les objets touchant à l'espace ou à l'étendue, car tout comme l'espace renferme l'étendue absolue, le point représente ce qui dans l'étendue est le plus limité, la simple situation [18]. Il en résulte que le point est un minimum dénué de parties, que tous les points sont congrus deux à deux (c'est-à-dire susceptibles de coïncider), donc également semblables, et si l'on peut dire, égaux [19].

11 Si on considère l'existence ou la perception simultanée de deux points, ce qui se présente à l'esprit est la relation de l'un à l'autre, relation différente selon les couples de points, en d'autres termes la relation locale ou de situation que deux points ont entre eux et qu'on appelle leur distance [20]. Or si la *distance* de deux points n'est rien d'autre que la grandeur de la plus courte trajectoire de l'un à l'autre [21] et si deux points A, B, sont, en conservant leur situation respective, congrus à deux autres C et D qui conservent aussi la leur, c'est-à-dire s'ils peuvent prendre leur place, la position ou la distance des deux premiers sera la même que celle des deux autres. Car des objets sont congrus lorsque l'un peut coïncider avec l'autre sans aucune modification en leur sein. Or les distances entre les points A, B et C, D étant les mêmes lorsqu'ils coïncident, il en va de même lorsqu'ils sont congrus, puisque cela signifie qu'on peut les faire coïncider sans y introduire de modification.

12 Une *trajectoire* (notion qui nous a également permis de définir la distance) n'est rien d'autre qu'un lieu continu successif. Celle d'un point se nomme *Ligne*. On peut en déduire que les extrémités d'une ligne sont des points et que toute partie d'une ligne est une ligne, c'est-

16. Cf. infra p. 334.

17. Cf. infra p. 334.

18. Cette définition constitue une tentative pour déduire le point, et par conséquent le situs, de l'espace, par le biais du concept de limite. Cette tentative s'oppose à l'indication d'une dualité irréductible entre deux objets de la géométrie, extensio et situs (cf. infra, XIV). Elle va à l'inverse dans le sens d'une distinction entre deux extensions, rapportées soit à la diffusion soit à la localité, telle qu'elle est exposée dans l'*Examen des principes du R.P. Malebranche*, cf. infra, *Postface*, note 19.

19. Cf. infra, p. 334.

20. Justification de l'existence du situs exactement analogue à la démonstration de l'existence rationnelle de la droite (cf. supra, V, note 11), d'où la caractérisation de la situation comme *distance*.

21. Cf. infra, p. 334.

via continuum quoddam, quia quaelibet eius pars extrema habet cum alia anteriori atque posteriori parte communia. Unde consequitur, ut hoc obiter addam, si linea quaedam in aliqua superficie ducatur, non posse aliam lineam in eadem superficie continue progredientem inter duo prioris lineae extrema transire, quin priorem secet.

(13) Via lineae ejusmodi, ut puncta ejus non semper sibi invicem succedant, *Superficies* est ; et via superficiei ut puncta eius non semper sibi invicem succedant, est *Corpus*. Corpus autem moveri non potest, quin omnia eius puncta sibi succedant (quemadmodum demonstrandum est suo loco), et ideo novam dimensionem non producit. Hinc apparet nullam esse partem corporis cuius ambitus non sit superficies, nullamque esse partem superficiei cuius ambitus non sit linea. Patet etiam extremum superficiei pariter atque corporis in se redire sive esse *ambitum* quendam.

(14) Assumtis jam duobus punctis, eo ipso determinata est via puncti per unum pariter atque alterum simplicissima possibilis : alioqui eorum distantia non esset determinata, adeoque nec situs. Haec autem linea quae a duobus solis punctis, per quae transit, determinata est ita nimirum, ut posito eam per duo data puncta transire, ipsa sola hinc consideranda offeratur, ea inquam linea dicitur *recta*, et licet utcunque producatur, dicitur una eademque recta. Ex quibus sequitur non posse duo eadem puncta duabus rectis communia esse, nisi eae duae rectae quantum satis est productae coincidant : ac proinde duas rectas non habere segmentum commune (alioqui et duo segmenti huius extrema haberent communia), nec spatium claudere sive componere ambitum in se

à-dire est limitée par des points [22]. Une trajectoire est d'autre part un continuum car chacune de ses parties a des extrémités communes avec une partie antérieure et une autre postérieure [23]. Il s'ensuit, je l'ajoute en passant, que si on trace une ligne sur une surface, une autre ligne progressant continûment sur la même surface ne peut passer entre deux extrémités de la première sans la couper [24].

13 La trajectoire d'une ligne, dont les points ne prennent pas constamment la place les uns des autres, est une *Surface*. Celle d'une surface dont les points ne prennent pas toujours la place les uns des autres, est un *Corps*. Un corps quant à lui ne peut être mû sans que tous ses points prennent la place les uns des autres (il faudra démontrer pourquoi le moment voulu) [25] et ce mouvement ne produit donc aucune nouvelle dimension [26]. Cela montre qu'un corps ne possède aucune partie dont le pourtour ne soit une surface et une surface aucune partie dont le pourtour ne soit une ligne. Il est clair également que l'extrémité d'une surface, tout comme celle d'un corps, revient sur elle-même pour constituer un certain *pourtour*.

14 Une fois que deux points sont choisis est par là même déterminée la trajectoire la plus simple possible passant à la fois par l'un et l'autre. Sinon leur distance ne serait pas déterminée, ni par conséquent leur situation [27]. Or cette ligne déterminée à partir seulement de deux de ses points, et qui soit la seule répondant à la condition de passer par eux, se nomme *droite*, et aussi loin qu'on la prolonge, il s'agit d'une seule et même droite. Il en résulte que deux points ne sauraient être communs à deux droites, à moins que celles-ci ne coïncident, aussi loin qu'on les prolonge. Il s'ensuit également que deux droites ne possèdent aucun segment commun (elles auraient aussi en commun ses deux extrémités), n'enferment aucun espace et ne forment donc aucun pour

---

22. « La trajectoire la plus courte d'un point à un autre constitue nécessairement la trajectoire d'un point, en d'autres termes, une ligne, en effet la trajectoire d'un point constitue la trajectoire d'un extensum continu d'une chose à une autre et est plus brève ou plus simple que celle d'un autre extensum. »

23. Cette définition correspondant à celle donnée à la fin du fragment XIII doit être complétée par celle du fragment XIV : un continu est un tout dont les parties sont déterminées de manière purement mentale.

24. Ce qui n'est vrai que si la première ligne s'écarte relativement peu d'une droite entre ces deux extrémités ou points.

25. Cf. infra, XIV.

26. Ceci fournit une indication supplémentaire sur le rejet d'un espace à quatre dimensions, question qui revient constamment dans les écrits géométriques de Leibniz et est traitée plus complètement dans le fragment XIV (cf. infra, XIV, note 12).

27. Remarque tendant à maintenir une distinction entre situs et distance.

redeuntem, alioqui recta una ab altera digressa ad ea rediret, adeoque in binis punctis ei occurreret [13]. Pars quoque rectae est recta [14], nam et ipsa determinatur per duo illa puncta sola, per quae sola determinatur totum. Determinatur, inquam, id est omnia eius puncta consideranda seu percurrenda ex sola duorum punctorum consideratione offeruntur. Ex his patet, si *A.B.C.* et *A.B.D.* congrua sint, et *A.B.C.* in una recta esse dicantur, coincidere *C* et *D*. Seu si punctum tantum unicum sit quod eam habeat ad duo puncta relationem, quam habet, erunt tria puncta in una recta. Contra si plura duobus sint puncta eodem modo se habentia ad tria vel plura puncta data, erunt haec quidem in eadem recta, illa extra eam, cuius rei ratio est, quod quae ad determinantia eodem modo se habent, eo ipso ad determinata eodem modo se habent, itaque tria plurave puncta in eadem recta haberi possunt pro duobus. Puncta autem eodem modo se habentia requiro plura duobus (nam si sint duo tantum, res procedit, modo tria, ad quae unumquodque duorum eodem modo se habet, sint in eodem plano, licet non sint in eadem recta).

Recta quoque uniformis est ob simplicitatem, seu partes habet toti similes. Et omnis recta rectae similis est, quia pars unius alteri congrua est, pars autem rectae toti similis. Et in recta distingui non potest concavum a convexo, sive recta non habet duo latera dissimilia, vel quod idem est : si duo puncta sumantur extra

13. Dans l'édition Gerhardt on lit « ad ea » au lieu de « ad eam » et « occureret » au lieu de « occurreret ».

14. Barré : « nam et ipsa determinatur seu consideranda offertur nimirum quoad omnia sua puncta per duo illa puncta sola, per quo determinatur totum... »

tour revenant sur lui-même [28] ; sinon une droite s'écarterait de l'autre pour revenir ensuite vers elle et l'intercepterait en deux points. De surcroît toute partie de droite est une droite [29], une telle partie pouvant elle-même être déterminée par les deux points qui suffisent à déterminer le tout ; je dis déterminée au sens où tous ses points peuvent être représentés et parcourus en ne considérant que ces deux points. Il est donc clair que si A.B.C et A.B.D sont congrus et que A, B, C sont alignés, C et D coïncident. En d'autres termes si un point est le seul à posséder la relation qui est la sienne à l'égard de deux points, les trois points seront sur la même droite. A l'inverse, s'il y a plus de deux points se comportant de la même manière à l'égard de trois points donnés ou plus, ces points seront bien sur une même droite, mais les premiers seront à l'extérieur de celle-ci ; la raison en est que des termes se trouvant dans le même rapport avec les éléments déterminants, se trouvent de ce fait dans le même rapport avec les éléments déterminés, on peut donc prendre trois points ou plus d'une même droite au lieu de deux. Or je cherche plus de deux points ayant un même comportement à leur égard (car s'il ne s'agissait que de deux points le raisonnement aboutit, pourvu que les trois points à l'égard desquels ils se comportent de la même manière, soient, sinon sur une même droite, du moins dans un même plan [30]). Une droite a également, en vertu de sa simplicité, la propriété d'être uniforme [31], ce qui signifie que ses parties sont semblables au tout. Et toute droite est semblable à toute autre dans la mesure où une partie de l'une est congrue à l'autre, or une partie de droite est semblable au tout. Il est impossible sur une droite d'établir la distinction concave, convexe, en d'autres termes une droite ne possède pas des côtés dissemblables ou, ce qui revient au même, envisage-t-on à l'extérieur de la droite deux

28. Leibniz parvient à proposer des démonstrations (possibles : il faut en donner la preuve précise) de plusieurs axiomes d'Euclide (édition Clavius) : *duae rectae non habent segmentum communem*, etc. Le projet de démontrer chacun des axiomes des *Eléments* est intimement lié à sa construction d'une nouvelle *Geometria Situs*.

29. Barré : « elle est en effet elle-même déterminée c'est-à-dire susceptible d'être étudiée, dans la mesure où tous ses points sont déterminés par le seul truchement des deux points permettant de déterminer la droite tout entière... »

30. Ce qui est toujours le cas ! Pour trois points A B C quelconques non alignés, il existe dans le cas général exactement deux points ayant la même situation à l'égard de A, B et C, symétriques de part et d'autre du plan ABC. L'existence de plus de points ayant la même situation à l'égard de A, B, C implique que A B et C soient alignés (ils définissent un cercle dans le plan perpendiculaire à la droite ABC).

31. La notion d'uniformité (*uniformis* par opposition à *disquiformis*) intervient également en logique, cf. infra, XIV, note 15.

rectam, quae eodem modo se habeant ad extrema rectae vel ad duo quolibet puncta in recta, ea sese etiam eodem modo habebunt ad totam rectam, seu ad quodlibet punctum in recta ; a quocunque demum latere rectae illa duo extra rectam puncta sumantur. Cuius rei ratio est, quia quae ad puncta determinantia aliquod extensum eodem se habent modo, ea etiam ad totum extensum eodem modo se habere necesse est. Denique recta a puncto ad punctum minima est, ac proinde distantia punctorum nihil aliud est quam quantitas rectae interceptae. Nam via minima utique magnitudine determinata est a solis duobus punctis ; sed et positione determinata est, neque enim in spatio absolute plures minimae a puncto ad punctum esse possunt [15] (ut in sphaerica superficies plures sint viae minimae a polo ad polum). Nam si minima est absolute, extrema non possunt diduci manente lineae quantitate, ergo nec partium extrema (nam et partes inter sua extrema minimas esse necesse est) [16] salva singularum partium quantitate, ergo nec salva totius quantitate. Jam si lineae duo extrema maneant immota et linea ipsa transformetur, necesse est puncta eius aliqua a se invicem diduci. Itaque extremis rectae immotis, salva quantitate minima inter duo puncta, in aliam transformari non potest, itaque non dantur plures minimae incongruae dissimiles inter duo puncta. Quare si duae inter duo puncta essent minimae [17], essent congruae inter se. Jam una aliqua minima est recta (ut supra ostendimus), ergo et alia minima erit recta. At duae rectae inter duo puncta coincidunt. Itaque minima inter duo puncta non nisi unica est.

15. Barré : « notum determinans accedere deberet quo una via minima ab alia via minima discerneretur ».

16. Leibniz a barré plusieurs phrases en essayant de trouver l'expression correcte : « Ergo linea transformari non potest salva extremorum distantia » ; « salva quantitate, ergo omnis cur transformatio » ; « salva lineae quantitate puncta media non possunt moveri. Mutatio ergo partium quantitate, is ergo... ».

17. Barré : « ambae essent rectae. Supra, autem demonstratum est congruerent inter se seu ambae essent rectae. »

points se comportant de la même manière à l'égard de ses extrémités ou à l'égard de deux quelconques de ses points, qu'on les envisage d'un côté ou de l'autre de la droite, ces points se comporteront de la même manière à l'égard de toute la droite et d'un quelconque de ses points. En voici la raison : des objets se comportant de la même manière à l'égard des points définissant un extensum se comportent nécessairement de la même manière à l'égard de cet extensum tout entier. Enfin, la droite allant d'un point à l'autre est minimale, la distance entre deux points n'est donc rien d'autre que la grandeur de la droite qu'ils interceptent [32]. Deux points suffisent en effet à déterminer la trajectoire minimale, du moins quant à sa grandeur ; mais ils en déterminent aussi la position, car dans l'espace considéré absolument il ne peut y avoir plusieurs trajectoires minimales d'un point à un autre [33] (dans le sens où sur une surface sphérique il y en a plusieurs d'un pôle à l'autre). Car si une trajectoire est absolument minimale, on ne peut en repousser les extrémités en gardant constante sa longueur, il en va donc de même des extrémités de ses parties (ces dernières étant nécessairement également minimales entre leurs extrémités) [34], si la grandeur de chaque partie reste identique, donc si la grandeur du tout reste la même (car les parties doivent nécessairement aussi être minimales entre leurs limites propres). Or si les deux extrémités d'une ligne demeurent fixes alors que cette ligne est elle-même modifiée, certains de ses points s'éloignent nécessairement les uns des autres. Ainsi donc dès que sont fixées les extrémités d'une droite, si la longueur minimale entre deux points est conservée, la droite ne peut être changée en une autre ligne. C'est la raison pour laquelle entre deux points il n'y a pas plusieurs trajectoires minimales non congrues et dissemblables ; si entre deux points il en existait deux [35], elles seraient deux à deux congrues. Or la droite étant bien, comme nous l'avons montré, une trajectoire minimale, toute trajectoire minimale sera également une droite, or deux droites joignant les deux mêmes points coïncident, il n'y a donc qu'une seule et unique trajectoire minimale entre deux points.

32. Leibniz va trouver par la suite une meilleure définition de la distance.

33. Barré : « il faudrait qu'apparaisse un caractère déterminant permettant de distinguer deux trajectoires minimales. »

34. Cf. infra, p. 335.

35. Barré : « elles seraient toutes deux des droites. Or il a été démontré plus haut qu'elles seraient mutuellement congrues c'est-à-dire qu'elles seraient des droites. »

(15) Modus generandi lineam rectam [18] simplicissimus hic est. Sit corpus aliquod cuius duo puncta sint immota et fixa, ipsum autem corpus nihilominus moveatur, tunc omnia puncta corporis quiescentia incident in rectam, quae per duo puncta fixa transit. Manifestum enim est [19] ea puncta eundem locum habere ex datis duobus punctis fixis determinatum, seu manentibus duobus punctis fixis et toto solido existente, moveri non posse ; cum caetera extra rectam, eadem servata ad duo puncta fixa relatione, locum mutare possint. Unum hic incommodum est, quod ea recta hoc modo descripta non est permanens. Aliter generari potest linea recta, si qua detur linea flexilis, sed quae in majorem longitudinem extendi non possit. Nam si extrema eius diducantur quousque id fieri potest, linea flexilis in recta erit transmutata. Eodem modo et plani ac Circuli et Trianguli proprietates ex constitutis definitionibus naturali quodam meditandi ordine duci possent. Nam de linea recta in specimen tantum disseruimus.

(16) Haec omnia animo consequi non difficile est, etsi neque figurae nisi imaginatione delineentur, neque characteres adhibeantur alii quam verba, sed quia in ratiocinationibus longe productis neque verba, ut hactenus concipi solent, satis exacta sunt, nec imaginatio satis prompta ; ideo figuras hactenus adhibuere Geometrae. Sed praeterquam quod saepe delineantur difficulter, et cum mora quae cogitationes optimas interea effluere sinit, nonnunquam et ob multitudinem punctorum ac linearum schemata confunduntur, praesertim cum tentamus adhuc et inquirimus ; ideo characteres sequenti modo cum fructu adhiberi posse putavi.

18. Barré : « per simplicem motum, corporis cujuscunque hoc modo : ».

19. Barré : « hoc sola ex <ad> duo puncta fixa esse determinata, sola nam si et ipsa moverentur, sequeretur diversa eorum loca… »

15 Le procédé le plus simple pour engendrer une droite [36] est le suivant [37] : si un corps comporte deux points fixes et immobiles mais qui ne l'empêchent pas de se mouvoir, tous ses points immobiles tomberont sur une droite joignant les deux points fixes. Il est clair en effet qu'ils conservent le même lieu, et que ce lieu est déterminé par les deux points fixes, en d'autres termes, deux points demeurant immobiles, ces points ne peuvent se mouvoir que si le solide est modifié, alors qu'au contraire les autres points extérieurs à la droite peuvent le faire tout en conservant la relation qui est la leur à l'égard des deux points fixes. Le seul inconvénient est que la droite ainsi décrite n'est pas durable [38]. On peut engendrer une droite d'une autre manière en se donnant une ligne flexible mais inextensible dans sa longueur, car en écartant le plus possible ses extrémités, cette ligne flexible se transformera en droite [39]. On pourrait de la même façon, selon un ordre naturel de la pensée, déduire de leurs définitions génériques les propriétés du plan, du Cercle, du Triangle ; nous n'avons en effet traité de la ligne droite qu'à titre d'exemple.

16 Il n'est pas difficile de parvenir à tous ces résultats mentalement, alors même qu'aucune figure ne serait tracée sinon en imagination, et sans employer d'autres caractères que des mots ; mais s'agissant de raisonnements très longs, c'est parce que les mots conçus comme ils l'ont souvent été jusqu'à présent manquent de précision et que l'imagination n'est pas assez sagace, que les Géomètres ont jusqu'à présent employé des figures. Or leur construction est souvent difficile et entraîne un retard laissant s'envoler les meilleures pensées dans l'intervalle, il arrive surtout que la multiplicité de points et de lignes les embrouillent, en particulier au stade des essais et des recherches ; ce qui m'a fait penser qu'il y avait intérêt à employer des caractères de la façon suivante [40].

36. Barré : « Par un simple mouvement d'un corps quelconque, de la manière suivante : »

37. Ce procédé a déjà été présenté, mais non complètement démontré, dans le fragment III. On retrouve d'autre part dans le fragment XVII le même enchaînement conduisant de la définition de la droite à sa génération par le mouvement d'un solide.

38. C'est peu dire ! Cette droite est même invisible, ce qui illustre merveilleusement la nature purement intellectuelle de sa définition.

39. Bien plus que la précédente cette construction relève d'un « mécanisme théorique », de même type de ceux qui permettent de concevoir une développée par le déroulement d'un fil, ou l'enveloppe d'une famille de courbes par le déplacement d'une montre tirée sur une table (cf. M. Parmentier, *La Naissance*, p. 257).

40. Leibniz a achevé son introduction à la nouvelle Géométrie menée tout au long des seize premiers paragraphes. Il a aussi fixé les définitions de notions

(17) Spatium ipsum seu extensum (id est continuum cuius partes simul existunt) non aliter hic quidem designari commode posse video quam punctis. Quoniam figurarum delineationes exacte exprimere propositum est, et in his non nisi *puncta* et *tractus quidam continui* ab uno puncto ad aliud spectantur, in quibus puncta infinita pro arbitrio sumi possunt. Ideo puncta quidem certa exprimemus literis [20] solis, ut *A*, item *B* [21].

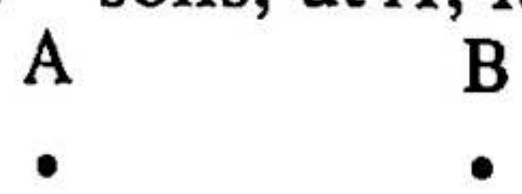


fig. 4

(18) Tractus autem continuos exprimemus per puncta quaedam incerta sive arbitraria, ordine quodam assumta, ita tamen, ut appareat semper alia tum intra ipsa tum ultra citraque semper posse sumi. Ita *3b6b9b.* significabit nobis totum tractum, cuius quodlibet punctum appellatur *b.* et in quo pro arbitrio assumsimus partes duas, unam cuius extrema sunt puncta *3b. 6b.*, alteram cuius extrema sunt puncta *6b. 9b.*

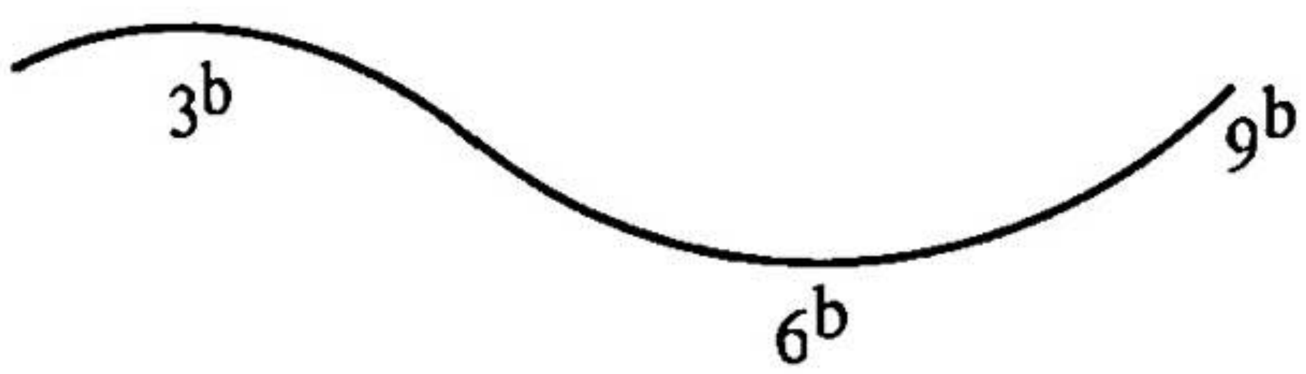


fig. 5

Unde patet illas duas partes continuas esse, cum habeant commune punctum *6b.* et divisio earum sit facta pro arbitrio. Hic tractus in quo duarum partium commune extremum nullum aliud est quam punctum, dicitur *Linea*, et repraesentari etiam potest motu puncti *b*, quod viam quandam percurrit, sive vestigia tot quot puncta diversa *3b. 6b. 9b.* relinquere intelligitur. Hinc linea dici potest via puncti. Via autem est locus continuus succesivus. Potest et per compendium designari hoc modo : Linea [22] $\overline{y}b$

20. Barré : « simplicibus ut *A B.* »
21. Barré : « Puncta autem incerta, et quae pro arbitrio assumi possunt, exprimemus adjectis numeris, ut appareat tum haec puncta tum alia quoque inter ipsa, et ultra citraque ipsa posse assumi. Ita lineam ... ».
22. Barré : « yb zb ».

17 Pour ce qui est de l'espace ou de l'extensum lui-même (continuum dont les parties existent simultanément) sa seule représentation commode me semble, du moins pour l'instant, consister dans celle de ses points. Il s'agit de traduire exactement la construction des figures, or dans celles-ci ne nous intéressent que des *points* et des *traits continus* joignant ces points, sur lesquels nous pouvons en choisir arbitrairement une infinité ; nous représenterons donc les points déterminés par des lettres sans autre indication comme A ou B (fig. 4) [41].

18 Je représenterai les traits continus par des points indéterminés c'est-à-dire arbitraires, choisis selon un certain ordre, mais de façon à faire apparaître la possibilité d'en choisir toujours d'autres entre eux, au-delà ou en deçà. Ainsi je noterai 3b6b9b l'ensemble du trait dont je nomme b le point général et sur lequel ont été arbitrairement choisies deux parties délimitées par les points 3b6b et 6b9b [42] (fig. 5). Ceci montre que ces deux parties sont continues, dans la mesure où elles ont un point commun 6b et où leur délimitation a été faite arbitrairement [43]. Un tel trait dont deux parties n'ont pour extrémité commune qu'un point, se nomme Ligne, laquelle peut aussi être représentée par le mouvement du point *b* parcourant une certaine trajectoire et dont on considère qu'elle laisse autant de traces qu'il y a de points 3b 6b 9b différents [44]. Une ligne peut donc être nommée la trajectoire d'un point, en entendant par trajectoire un lieu continu et successif. Elle peut aussi être désignée en abrégé par : Ligne $\overline{y}$b, en désignant par $\overline{y}$ ou par

géométriques fondamentales : espace, trajectoire, ligne, point, surface, corps, lieu, égalité, congruence, etc. Il introduit à présent la *Caractéristique*, et pour ce faire reprend ses recherches précédentes (fragments VI et VIII notamment).
41. Barré : « Nous exprimerons des points indéterminés et pouvant être choisis arbitrairement par des chiffres en indice, de façon à faire apparaître qu'on peut en plus de ces points en choisir d'autres pointsentre eux, au delà et en deçà... »
42. Cf. supra, II, note 4.
43. Cf. supra, note 17.
44. Sur la distinction entre trace (vestigium) et trajectoire (via), cf. supra, VI, note 25.

designando per literam $\overline{y}$. vel aliam numeros ordinales pro arbitrio sumtos collective. Cum vero scribemus : yb sine nota supra y, intelligemus quodcunque lineae $\overline{y}b$ punctum, distributive.

Eodem modo tractus quidam fingi possunt, quorum partes cohaerent lineis, vel qui describi intelliguntur motu lineae tali ut puncta eius non succedant sibi, sed ad nova loca deveniant. Hic tractus sive via lineae dicitur *superficies*, ponamus nimirum in *fig. 6* lineam supra dictam *3b6b9b* moveri, eiusque locum unum appellari [23]*33b36b39b*, locum alium sequentem *63b66b69b* et rursus alium sequentem *93b96b99b*, fiet superficies *33b36b39b*, *63b66b69b*, *93b96b99b* quam et per compendium sic designabimus [24], *zb*.

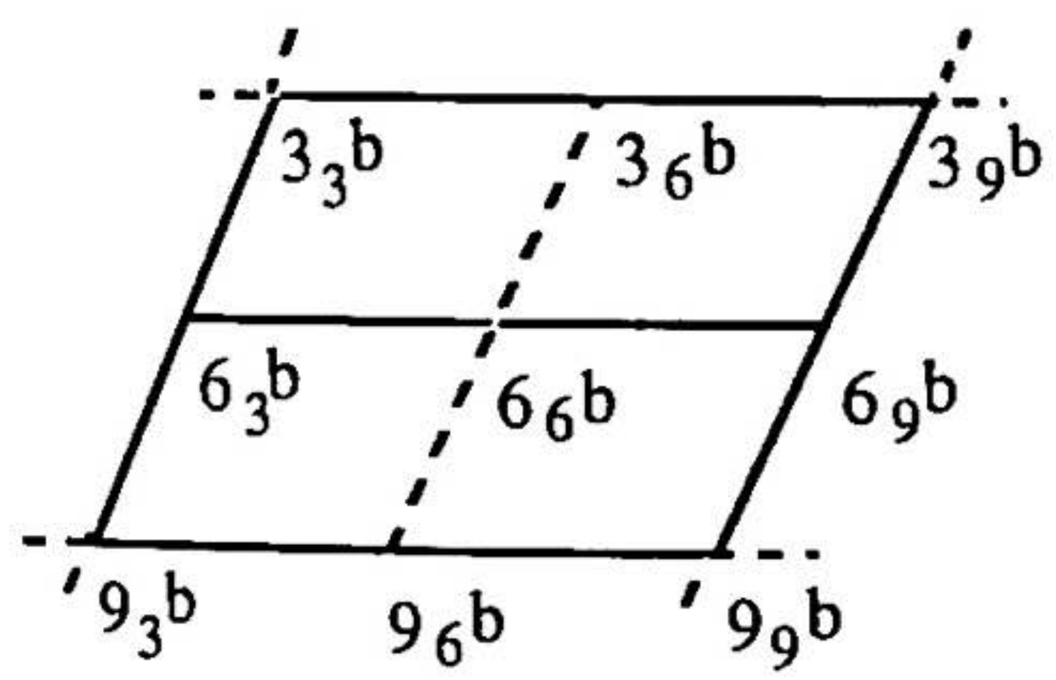


fig. 6

(19) Ubi patet etiam, quemadmodum motu lineae $\overline{y}b$. secundum puncta *zb*. describitur superficies $\overline{zy}b$. Ita vicissim motu lineae $\overline{y}b$. secundum puncta *zb*. describi eandem superficiem $\overline{yz}b$ [25]. At *yzb* [26] significabit unaquaeque loca puncti *b*, non collective, sed distributive, et $Z\overline{y}b$ significat unam aliquam lineam $\overline{y}b$ in superficie $\overline{zy}b$ sumtam quamcunque etiam non collective, sed distributive.

(20) Neque refert, cujus figurae sint ipsae lineae quae moventur ; aut etiam secundum quas fit motus, sive quas unum ex lineae motae punctis describit : inspiciatur *figura 7*.

Potest etiam fieri ut durante motu, ipsa linea mota figuram mutet, ut linea *zb*. in dicta fig. 7. Quod clarius intelligi potest, si quis cogitet quam superficiem descripturus esset arcus, qui durante explosione utcunque moveretur totus, exempli causa si caderet

23. Barré : « 3,3b 3,6b … »
24. Barré : « *yzb* … »
25. Barré : « Neque referre cuius figurae sint lineae describentes… »
26. Dans l'édition Gerhardt on lit « *zyb* » au lieu de « *yzb* ».

toute autre lettre un ensemble de nombres ordinaux arbitrairement choisis [45] ; en écrivant yb, sans signe au dessus de y, nous désignerons au contraire un point quelconque de la ligne $\overline{y}b$ considéré individuellement.

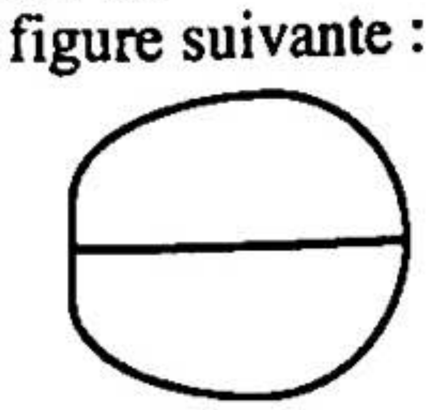
On peut de la même façon concevoir des tracés dont les parties soient constituées par des lignes et qui soient décrits par l'une d'elles se déplaçant de façon à ce que ses points ne se recouvrent pas les uns des autres et occupent de nouveaux lieux. Ce tracé ou trajectoire d'une ligne se nomme *surface*. Supposons donc (fig. 6) que la ligne que nous avons appelée 3b6b9b soit mise en mouvement, que son premier lieu soit noté 33b36b39b, le suivant 63b66b69b, le suivant 93b96b99b, on obtiendra la surface 33b36b39b63b66b69b 93b96b99b, en abrégé : $\overline{zy}b$.

19 On voit également que la surface $\overline{zy}b$ décrite par le mouvement de la ligne $\overline{y}b$ le long des points $\overline{z}b$ est la même que la surface $\overline{yz}b$ décrite par le mouvement de la ligne $\overline{z}b$ le long des points $\overline{y}b$; zyb symbolisera au contraire tous les lieux possibles du point b considérés non dans leur totalité mais individuellement, et $Z\overline{y}b$ une certaine ligne $\overline{y}b$ prise individuellement et non collectivement sur la surface $\overline{zy}b$.

20 La forme des lignes qui se déplacent, de celles le long desquelles elles le font et de celles que décrit un des points, n'importe pas. Observons la fig. 7 [46]. Il peut même arriver que la ligne se modifie elle-même au cours de son mouvement [47], comme c'est ici le cas, sur la fig. 7, pour la ligne $\overline{z}b$; on le comprend mieux en imaginant la surface que décrirait au cours d'une explosion un arc se déplaçant dans son ensemble de manière aléatoire en s'effondrant sur le sol. Il

45. Introduction d'une nouvelle notation tout à fait décisive indiquant la conception ensembliste des lieux et surmontant en partie la limitation inhérente au repérage des éléments d'un continu par des entiers naturels. L'étape suivante, introduite au paragraphe 89, consistera à représenter directement les points par la variable Y et les lieux par un vinculum $\overline{Y}$.

46. Leibniz a dessiné aussi la figure suivante :



47. La définition des lieux au sein de la caractéristique géométrique fait donc intervenir deux types de mouvements, les uns sont des isométries (des « déplacements »), les autres s'accompagnent d'une modification des distances et des formes (cf. supra, VII, note 10).

in terram. Potest etiam linea mota durante motu partes aliquas amittere, quae ab ea sive re sive animo separantur, ut patet ex *fig. 8.*

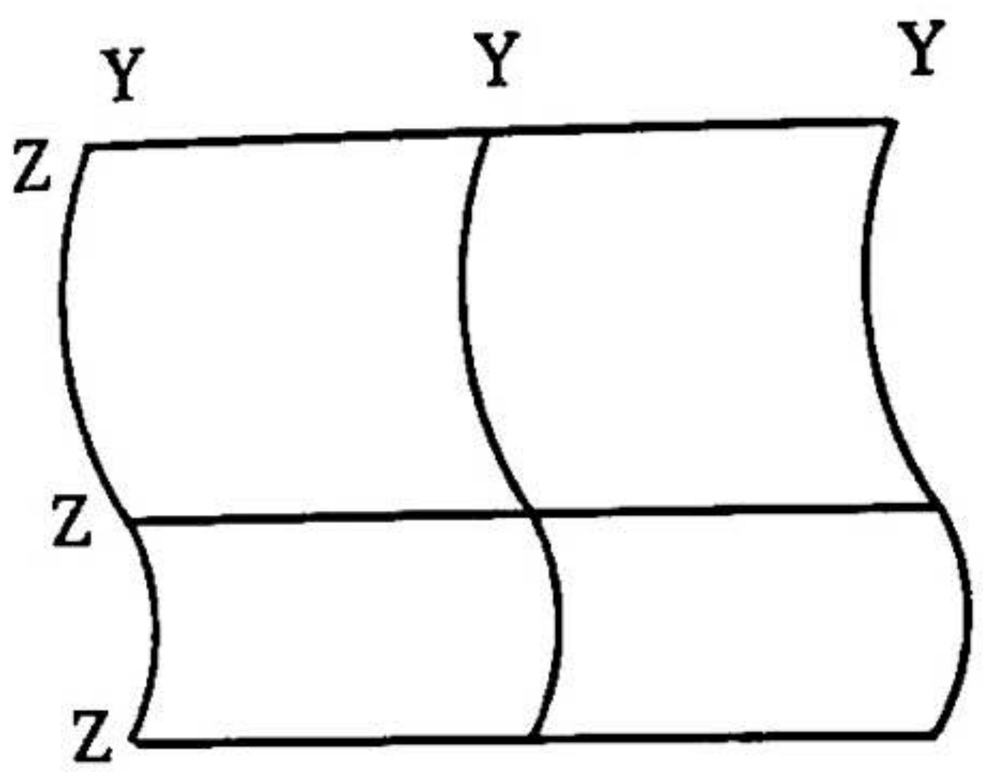


fig. 7

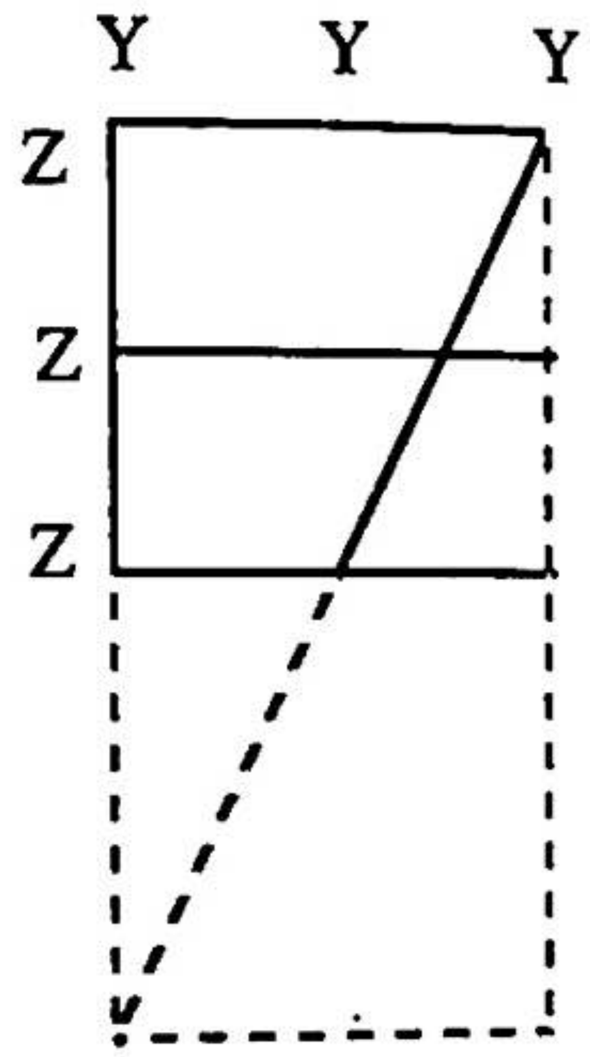


fig. 8

Fieri etiam potest, ut punctum unum plurave, exempli gratia *3b* in linea mota durante motu quiescat, et loca eius expressa velut plura, exempli gratia *$3_3b6_3b9_3b$.*, inter se coincidant, ut intelligitur inspecta *fig. 9*. Sed hae varietates omnes multaeque aliae plures etiam characteribus designari poterunt, quemadmodum suo loco patebit.

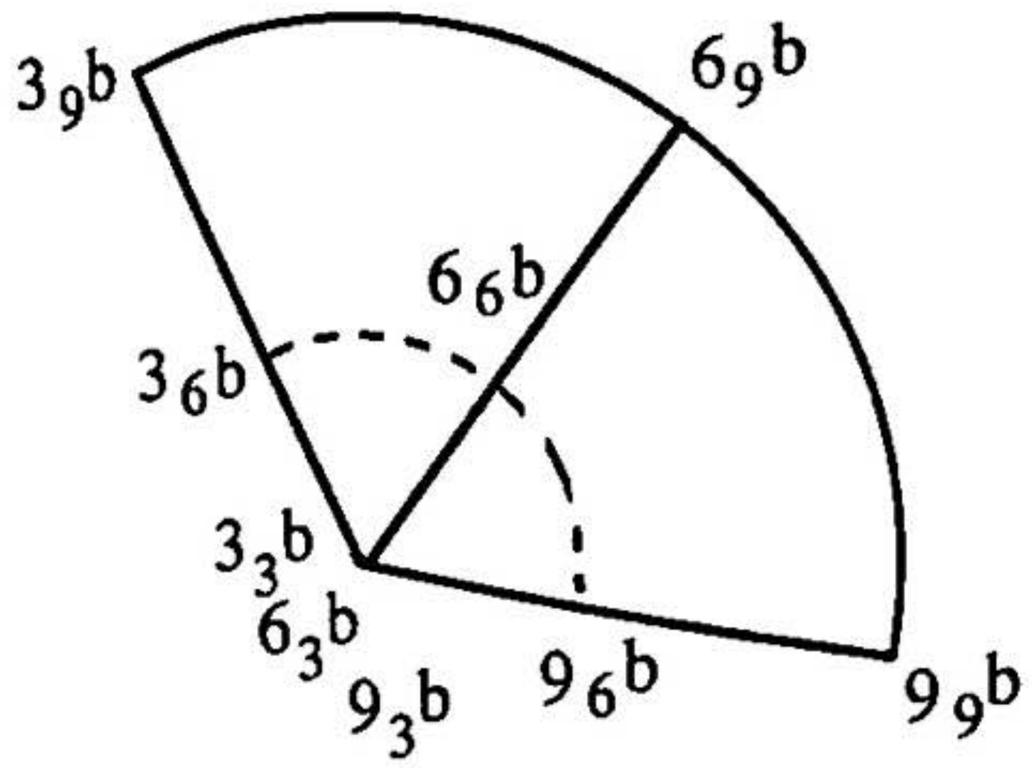


fig. 9

(21) Quemadmodum autem lineae motu describitur Tractus ille quem vocant Superficiem, ita superficiei motu (tali ut partes eius vel puncta sibi non ubique succedant) describitur Tractus quem vocant Solidum sive corpus : quod exemplo uno satis intelligi potest (*fig. 10*),

se peut également qu'au cours de son mouvement une ligne perde effectivement ou fictivement certaines de ses parties, comme le montre la fig. 8.

Il peut enfin arriver qu'un ou plusieurs points d'une ligne en mouvement demeurent immobiles [48], par exemple 3b, et que coïncident certains de leurs lieux 3_3b, 6_3b, 9_3b, dont les expressions étaient différentes. La fig. 9 le montre. Des formules caractéristiques permettront, on le verra plus tard, d'exprimer toutes ces possibilités en même temps que beaucoup d'autres.

21 Tout comme le mouvement d'une ligne décrit un Tracé [49] nommé Surface, celui d'une surface (pour autant que ses parties ou ses points ne se recouvrent pas les uns des autres) décrit un Tracé nommé Solide ou corps, un seul exemple suffit à le faire comprendre (fig. 10).

48. Possibilité essentielle pour la génération de la droite exposée dans le paragraphe 15.

49. Nous traduisons uniformément le terme *tractus* par tracé. Cette notion joue d'ailleurs dans ce fragment un rôle comparable à celle de *trajectoire*. Au paragraphe 101 Leibniz en fait un synonyme d'extensum.

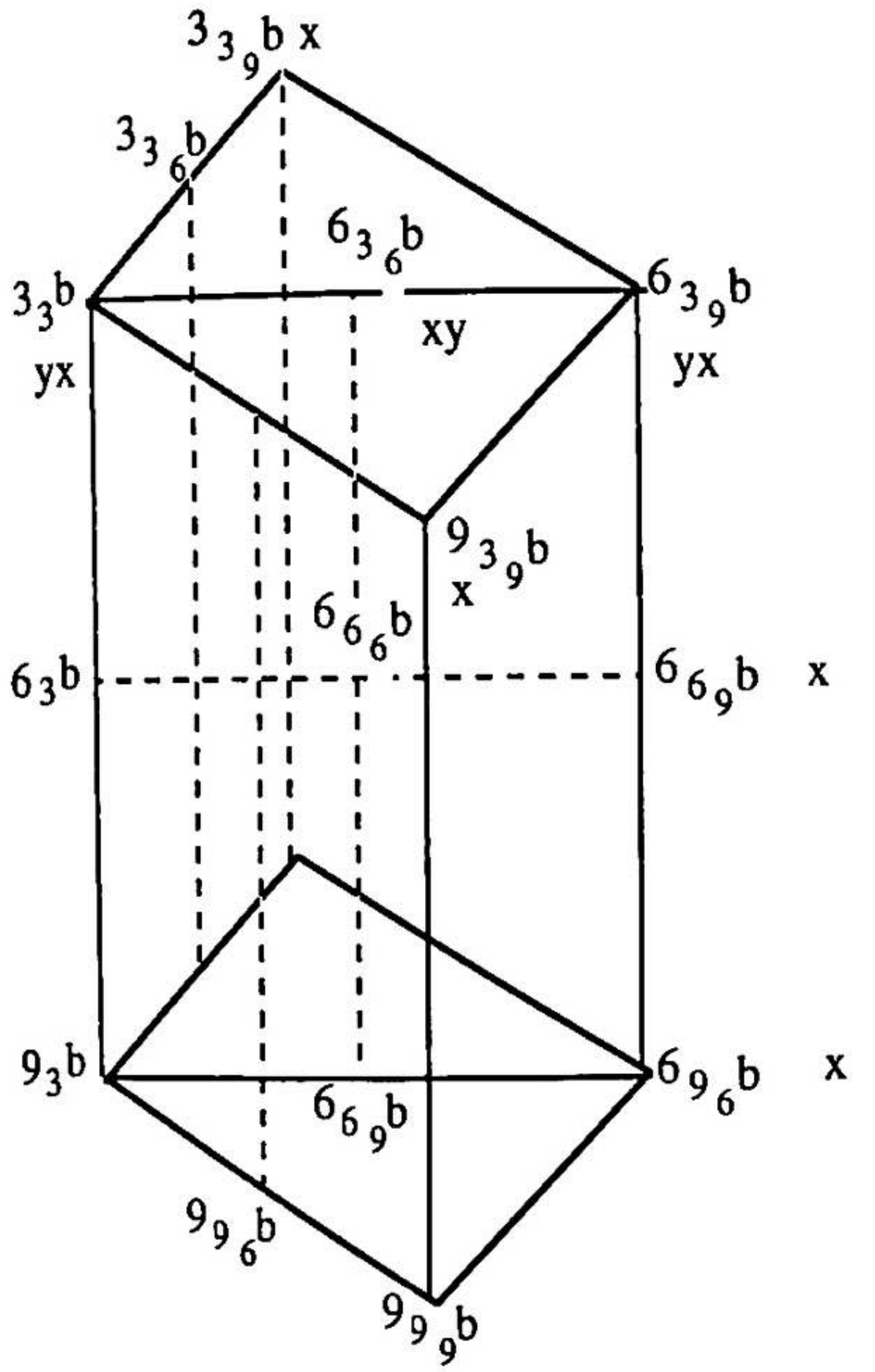


fig. 10

ut si immota manente linea (recta) $\overline{z3}\,b$ (nempe ($3_3b6_3b9_3b$.) in superficie (rectangulo) $\overline{zy}\,b$ nempe

$$\begin{pmatrix} 3_3b6_3b9_3b \\ 3_6b6_6b9_6b \\ 3_9b6_9b9_9b \end{pmatrix}$$

moveatur haec ipsa superficies, motu suo describet solidum

$$\begin{pmatrix} 3_{33}b3_{36}b3_{39}b3_{63}b3_{66}b3_{69}b3_{93}b3_{96}b3_{99}b \\ 6_{33}b6_{36}b6_{39}b6_{63}b6_{63}b6_{69}b6_{93}b6_{96}b6_{99}b \\ 9_{33}b9_{36}b9_{39}b9_{63}b9_{66}b9_{69}b9_{93}b9_{96}b9_{99}b \end{pmatrix}$$

ubi tamen notandum, hoc loco ob rectam $\overline{z3}\,b$ immotam puncta $3_{33}b$, $6_{33}b$, $9_{33}b$, (ideoque loco omnium in figura reperitur solum 3_3b) coincidere, itemque puncta $3_{63}b$, $6_{63}b$, $9_{63}b$, unde etiam in figura habetur tantum 6_3b ; ac denique cum eodem modo hic coincidant puncta $3_{93}b$, $6_{93}b$, $9_{93}b$, tantum per 9_3b expressa sint. Hoc solidum autem per compendium exprimemus hoc

Considérons une ligne (droite) $\overline{z3}\,b$ ($3_3b6_3b9_3b$) demeurant immobile sur une surface (un rectangle) $\overline{zy}\,b$, à savoir la surface :

$$\begin{pmatrix} 3_3b6_3b9_3b \\ 3_6b6_6b9_6b \\ 3_9b6_9b9_9b \end{pmatrix}$$

Tandis que cette surface se déplace, la ligne décrira dans son mouvement le solide :

$$\begin{pmatrix} 3_{33}b3_{36}b3_{39}b3_{63}b3_{66}b3_{69}b3_{93}b3_{96}b3_{99}b \\ 6_{33}b6_{36}b6_{39}b6_{63}b6_{63}b6_{69}b6_{93}b6_{96}b6_{99}b \\ 9_{33}b9_{36}b9_{39}b9_{63}b9_{66}b9_{69}b9_{93}b9_{96}b9_{99}b \end{pmatrix}$$

Remarquons ici que l'immobilité de la droite $\overline{z3}\,b$ entraîne la coïncidence des points $3_{33}b$, $6_{33}b$, $9_{33}b$ (c'est la raison pour laquelle la figure ne fait apparaître que le point 3_3b) mais aussi des points $3_{63}b$, $6_{63}b$, $9_{63}b$, dont la figure ne fait apparaître que 6_3b, enfin des points $3_{93}b$, $6_{93}b$, $9_{93}b$, qui ne sont exprimés que par 9_3b. En abrégé nous modo : $\overline{xzy}b$, et aliquam eius superficiem seu locum aliquem ipsius $\overline{zy}b$ exprimemus hoc modo $x\overline{zy}b$ (ita exhibetur sectio cylindricae portionis seu solidi huius facta plano per axem). Potest etiam aliqua ejus superficies $\overline{xy}b$ assumi hoc modo $z\overline{xy}b$ (ita exhibetur sectio huius portionis cylindricae secundum basin seu plano basi parallelo) ; item hoc modo $y\overline{xz}b$ (ita exhibetur sectio huius cylindricae portionis per alium cylindrum axem cum isto communem habentem). Aliae quoque sectiones eiusdem Figurae intelligi possunt, quia infiniti etiam fingi possunt modi, eam generandi per motum vel etiam resolvendi in partes secundum certam aliquam legem. Caeterum omnes varietates, quas in superficiei productione vel resolutione paulo ante indicavimus, multo magis in solido locum habere manifestum est. Denique dimensionem aliquam altiorem solido, seu tractum ipsius solidi motu tali descriptum, ut puncta eius sibi ubique non succedant, reperiri non posse, suo loco demonstrandum est.

(22) Porro tractus ipsi seu loca punctorum quorundam indefinitorum, determinantur punctis quibusdam certis, itemque Legibus quibusdam, secundum quas ex paucis illis punctis certis caetera puncta indefinita ordine in considerationem venire, et tractus ipsi generari sive describi possint.

Quod antequam exponamus, signa quaedam explicabimus quibus in sequentibus utendum erit. Primum itaque fieri potest, ut duo vel plura nomina in speciem diversa non sint revera nisi unius rei sive loci, id est puncti vel lineae alteriusve tractus, atque ita *eadem esse* sive *coincidere* dicentur. Ita, si sint duae lineae *AB* et *CD*, sintque puncta *A* et *C* unum idemque, hoc ita designabimus : $A \infty C$, id est *A* et *C* coincidunt.

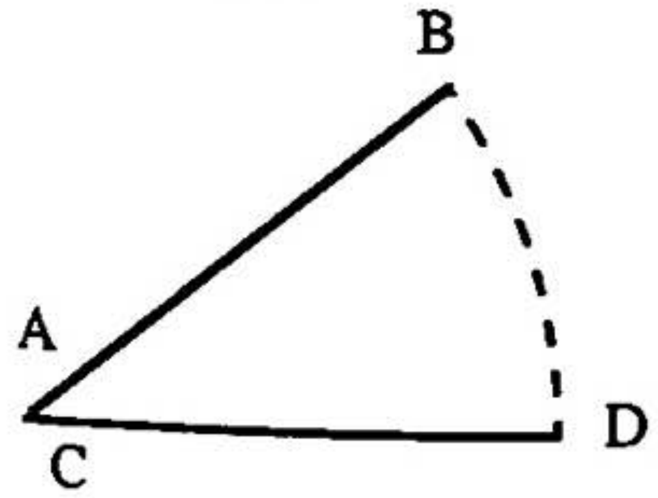


fig. 11

Hoc maxime usum habebit in designandis punctis aliisque extremis communibus diversorum Tractuum. Idem enim punctum sive extremum suas denominationes habebit, tam secundum

noterons ce solide $\overline{xzy}b$, $x\overline{zy}b$ une quelconque de ses surfaces $\overline{zy}b$, c'est-à-dire un certain lieu de celle-ci (ceci donne la section d'un tronc de cylindre ou du cylindre lui-même par un plan passant par son axe). On peut également représenter une de ses surfaces $\overline{xy}b$ par $z\overline{xy}b$ (ce qui donne la section d'un tronc de cylindre selon la base, c'est-à-dire par un plan parallèle à celle-ci), ou par $y\overline{xz}b$ (ce qui donne la section d'un tronc de cylindre par un autre cylindre possédant un axe commun avec le premier). D'autres sections de la même figure sont concevables dans la mesure où on peut imaginer une infinité de façons de l'engendrer par le truchement d'un mouvement ou de la décomposer selon une certaine loi fixée. Toutes les possibilités que nous venons d'indiquer pour produire ou diviser une surface sont d'ailleurs de toute évidence a fortiori valables pour un solide. Enfin il faut démontrer le moment venu qu'il est impossible de trouver une nouvelle dimension supérieure au solide, c'est-à-dire une trajectoire décrite par un solide se déplaçant de façon que ses points ne se recouvrent pas les uns les autres [50].

22 Mais les lieux d'un nombre indéfini de points, que nous avons nommés tracés, sont eux-mêmes déterminés à l'aide de certains points fixés et de Lois permettant de faire apparaître, dans un certain ordre, tous les points indéfinis, à partir d'un petit nombre de points fixés et ainsi d'engendrer, c'est-à-dire de construire, ces tracés [51].

Mais avant d'y venir, nous définirons certains signes dont nous aurons besoin dans la suite. Il peut arriver en premier lieu que deux noms ou plus, apparemment distincts, ne désignent en réalité qu'un seul et même objet ou un seul et même lieu [52], qu'il s'agisse d'un point, d'une ligne ou d'une autre trajectoire. Nous dirons alors que ces objets sont *identiques* ou qu'ils *coïncident*. Soient deux lignes AB et CD (fig. 11) telles que A et C soient un seul et même point, nous écrirons $A \infty C$ pour indiquer que A et C coïncident. Cela sera surtout utile pour noter les points communs ou autres extrémités communes à divers Tracés : un même point ou une même extrémité recevront une déno-

50. Cf. infra, p. 335.

51. Cette exigence, essentielle à l'interprétation finale de l'espace lui-même comme ordre, est implicitement présente dans la caractérisation des différents extensa comme trajectoires. Les lieux sont donc toujours aux yeux de Leibniz des ensembles ordonnés.

52. Cette éventualité, fréquente en *analysis situs*, mais aussi en géométrie analytique (les deux intersections d'une courbe avec une sécante se confondent quand celle-ci devient tangente), joue à plusieurs reprises le rôle de modèle dans l'explication leibnizienne de la nature de l'espace, cf. *Cinquième écrit à Clarke*, § 28, *éd. cit.*, p. 135.

unum tractum, quam secundum alterum [27]. Quod si dicatur *A.B* ∞ *C.D*, sensus erit simul esse *A* ∞ *C* et *B* ∞ *D*. Idemque est in pluribus. Ab utraque enim enuntiationis parte, idem ordo est observandus.

fig. 12

(23) Quod si duo non quidem coincidant, id est non quidem simul eundem locum occupent, possint tamen sibi applicari, et sine ulla in ipsis per se spectatis mutatione facta alterum in alterius locum substitui queat, tunc duo illa dicentur esse *congrua* ut *AB* et *CD. in fig. 11*. Itaque fiet *AB* γ *CD* item *A.B* γ *C.D. in fig. 12*, id est servato situ inter *A* et *B*, item servato situ inter *C.* et *D.*, nihilominus *C.D.* applicari poterit ipsi *A.B.*, id est simul applicari poterit *C* ipsi *A* et *D* ipsi *B*.

(24) Si duo extensa non quidem congrua sint, possint tamen congrua reddi, sine ulla mutatione molis sive *quantitatis*, id est retentis omnibus iisdem punctis ; facta tantum quadam si opus est transmutatione, sive transpositione partium vel punctorum ; tunc dicentur esse *aequalia*.

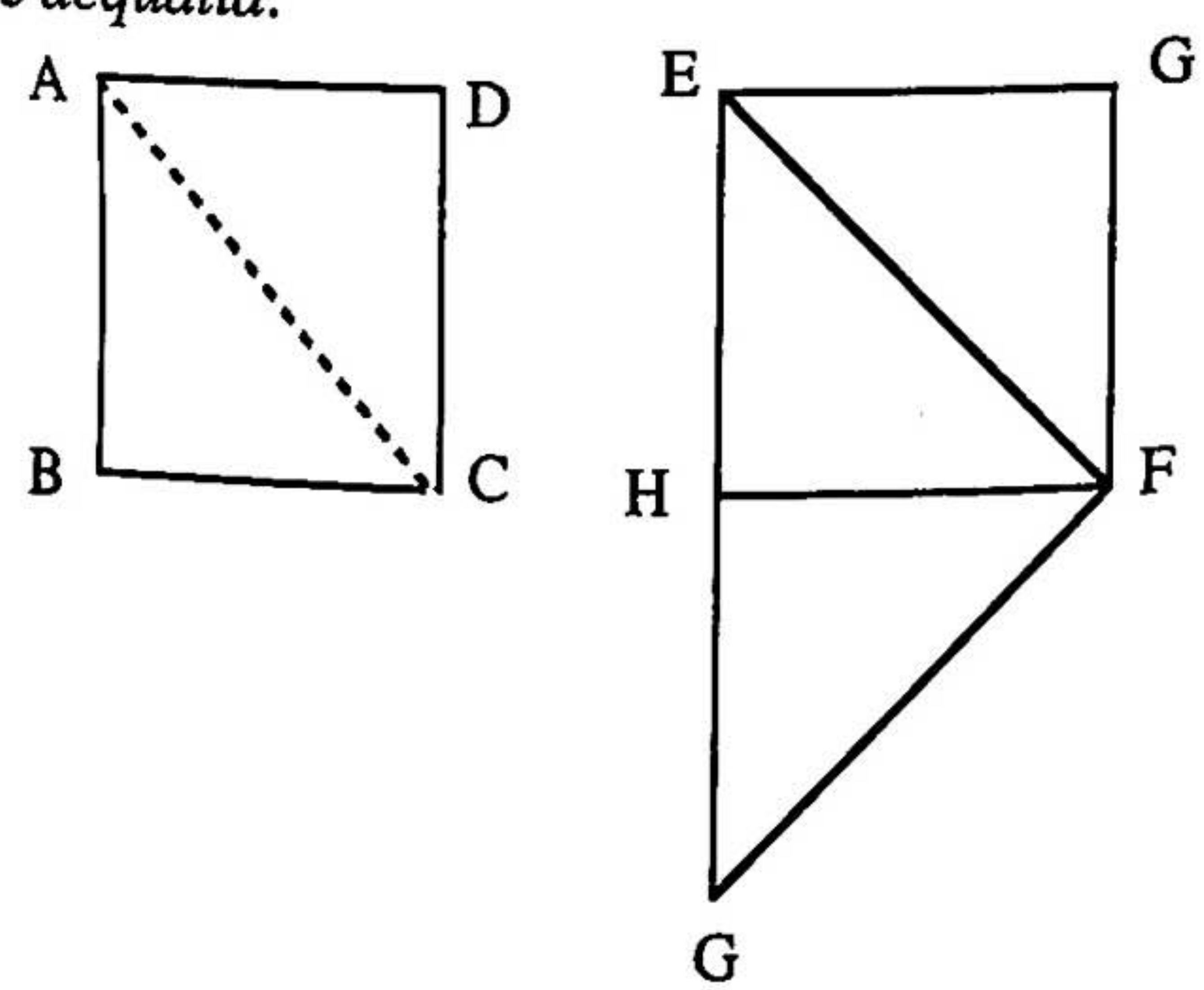


fig. 13

Ita in fig. 13 quadratum *ABCD* et triangulum isosceles *EFG* basin habens *EG* lateri *AB* quadrati duplam, aequalia sunt [28] :

27. Barré : « Quod si duae res non coincidant quidem sive eundem locum simul occupent... ».
28. Barré : « sive : quia *ABC aequ. EHF* et *ABC aequ...* ».

mination spécifique selon leur appartenance à l'un ou à l'autre [53]. La formule A.B ∞ C.D (fig. 12) signifiera A ∞ C et B ∞ D, et ainsi de suite pour un plus grand nombre de points, le même ordre devant être respecté dans chaque membre.

23 Si deux choses ne coïncident pas, c'est-à-dire n'occupent pas actuellement le même lieu au même moment, mais peuvent se superposer et se substituer l'une à l'autre sans aucune modification interne, on dira qu'elles sont *congrues*, comme AB et CD sur la fig. 11, ce qu'on notera AB γ CD ; de même sur la fig. 12, AB γ CD, ce qui signifie que tout en préservant la situation mutuelle de A et de B ainsi que celle de C et de D, on pourra bel et bien superposer C.D à A.B, soit superposer en même temps C à A et D à B.

24 Si, sans être effectivement congrus, deux extensa pouvaient le devenir sans modification de leur masse, c'est-à-dire de leur *quantité*, c'est-à-dire encore sans modification de leurs points, par le seul truchement d'une transmutation ou transposition éventuelle de leurs parties ou de leurs points, on dira qu'ils sont *égaux*. Sur la fig. 13 par exemple il y a égalité entre le carré ABCD et le triangle isocèle EFG, dont la base EG est double du côté A.B du carré. Transportons FGH en

53. Barré : « Or si deux choses ne coïncident pas, c'est-à-dire n'occupent pas le même lieu... »

nam transferatur FHG in EGF, quia $EGF\ \gamma\ FHG$. Fiet EFG *aequ.* $EHFG$. Jam $EHFG\ \gamma ABCD$, ergo EFG *aequ.* $ABCD$. Hinc generalius si $a\ \gamma c$ et $b\ \gamma d$ erit $a+b\ \Pi$ *(sive aequ.)* $c+d$. Imo amplius : si $a\ \gamma\ e$, $b\ \gamma\ f$, $c\ \gamma g$, $d\ \gamma h$, fiet : $a+b-c+d\ \Pi\, e+f-\gamma+h$. Sive [29] si duae fiant summae ex quibusdam partibus uno eodemque modo addendo vel subtrahendo, partesque unius sint congruae partibus alterius eodem modo ad totum constituendum concurrentibus, quaelibet unius summae uni alterius summae sibi ordine respondenti ; tunc duae summae quae inde fient, non quidem semper congruae erunt, erunt tamen semper aequales. Atque ita argumentatio a congruis ad aequalia ipsa aequalium definitione constituitur. Sunt quidem alias *aequalia*, quorum eadem est magnitudo. Verum [30] ipsa partium congruentium cuidam rei sive mensurae, multitudo est magnitudo, ut si *in fig. 14* sint duo magnitudinem habentia, a et b, et detur res tertia c quae sit *bis* a + *ter* b. Patet eius magnitudinem multitudine partium tum ipsi a tum ipsi b congruentium exprimi, itaque quae congrua reddi possunt nullo addito vel detracto, utique aequalia esse necesse est [31].

29. Barré : « ex congruis quotcunque eandem summam... ».
30. Barré : « *magnitudo* est illud ipsum quod nihil aliud quam... ».
31. Barré : « Cum enim punctum quodvis cuivis congruat, et numerus punctorum in duobus rebus congruentibus congruis sit idem, hoc est cuilibet puncto in uno respondet suum proprium in altero, utique aequalia sunt. Sed quia non satis accurate puncta partes appellantur, aut numerum habere dicuntur ; et possunt aequalia esse quae nullas habent partes congruentes ut superficies cylindrica et circulus. Ideo magnitudinem potius intelligere generalia esse attributum rei expressum per alias res, ad ipsam pertinentes homogeneas datas atque determinatas, <manente> etiam harum rerum relatione inter se invicem mutata. *Homogeneas* intelligo quae in communi aliquo conveniunt, ut punctum, linea, corpus et horum partes. *Datas* id est congruentes certis quibusdam rebus ; *Determinatas*, ita scilicet ut qualibet earum proposita appareat ex ipsa expressione an ad rem pertineat vel non. Atque ita extensi praedici per quod determinari potest, an punctum aliquod ad ipsum pertineat quodque eadem manet, mutato punctorum situ inter se magnitudo extensi appellabitur. Quod si partes datis quibusdam rebus congrua determinari in re possint, utique et puncta in illis determinari poterunt, adeoque numerus partium rebus quibusdam certis congruentium, cum modum exhibeat omnia rei puncta ita determinandi, ut nihil referat quis sit situs punctorum invicem, utique erit magnitudo. »

EGF, comme EFG γ FGH, il viendra EFG ég EHFG ; or EHFG γ ABCD, donc EFG ég. ABCD.

D'où plus généralement, si a γ c et b γ d, a+b Π (égal) c+d, et même : si a γ e, b γ f, c γ g, d γ h, on aura a+b–c+d Π e+f–g + h, en d'autres termes, si une addition (une soustraction) similaire [54] de certaines parties donne deux sommes telles que les parties jouant le même rôle dans la formation de l'une et de l'autre soient congrues (toute partie d'une des sommes est congrue à celle qui lui correspond dans l'autre somme), les deux sommes obtenues ne seront pas toujours congrues mais seront toujours égales. Le raisonnement concluant de la congruence à l'égalité repose donc sur la définition même de celle-ci. Certes, d'un autre point de vue, on nomme *égaux* des objets ayant même grandeur, mais celle-ci n'est en fait rien d'autre que le nombre de parties congrues à quelque chose, l'unité de mesure [55]. Soient par exemple sur la fig. 14 deux objets de grandeurs a et b, soit c un troisième égal à 2 fois a + 3 fois b, sa grandeur s'exprime manifestement par le nombre de ses parties congrues à a ou b ; dès lors les choses qu'on rendrait congrues sans leur retrancher ni leur ajouter quoi que ce soit sont nécessairement toujours égales [56].

54. Cf. supra VII, note 16.
55. La congruence est donc essentielle à la définition de la grandeur et l'analyse quantitative suppose, au niveau des principes et des définitions, une analyse qualitative.
56. Barré : « Un point quelconque étant congru à tout autre, et le nombre de points congrus dans deux choses congrues étant le même, dans la mesure où à chaque point de l'une correspond un point bien particulier de l'autre, ces deux choses sont égales. Mais il n'est pas très rigoureux d'appeler les points des parties ou de parler de leur nombre, deux choses peuvent donc être égales sans posséder de parties congrues, par exemple une surface cylindrique et un cercle. Il vaudrait donc mieux considérer la grandeur d'un objet comme un attribut exprimé par le truchement d'autres objets convenant avec le premier, homogènes, donnés et déterminés, indépendamment des modifications de leurs relations mutuelles. J'appelle *homogènes* des objets possédant quelque chose en commun, comme un point, une ligne, un corps et leurs parties ; en disant donnés je veux dire congrus à des objets déterminés ; déterminés au sens où un objet étant donné, son expression montre d'elle-même s'il convient ou non à un autre. Ainsi s'agissant d'un extensum, le prédicat permettant de déterminer si un point lui appartient, et ceci indépendamment des modifications de la situation mutuelle des points, sera nommé la grandeur de cet extensum. Si on peut déterminer dans un objet ses parties congrues à certaines autres objets donnés, on pourra alors en déterminer certains points, et donc le nombre de parties congrues à certains objets déterminés ; ce mode de détermination faisant apparaître tous les points d'un objet, indépendamment de leur situation mutuelle, ce sera bien la grandeur. »

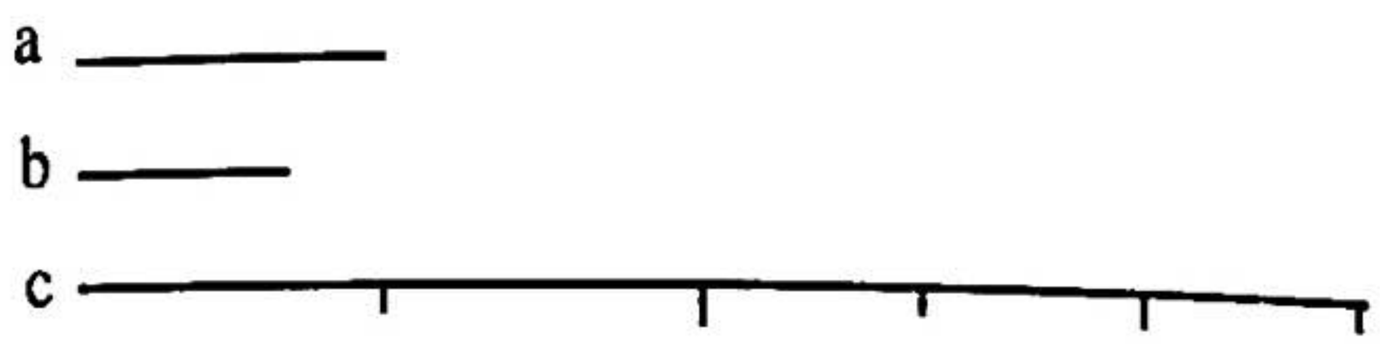


fig. 14

(25) Verum ut rem istam altius repetamus, explicandum est, quid sit pars et totum, quid homogeneum, quid magnitudo, quid ratio. *Pars* nihil aliud est quam requisitum totius diversum (seu ita ut alterum de altero praedicari nequeat) immediatum, in recto cum correquisitis. Ita *AB.* requisitum est ipsius *AC.*, id est si non esset *AB.* neque foret *AC.* ; diversum quoque est, neque enim *AC.* est *AB.* ;

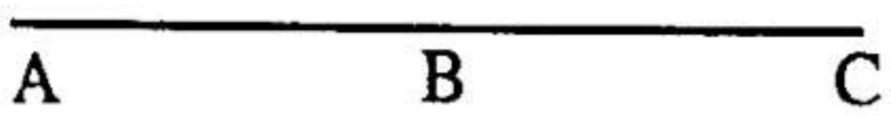


fig. 15

alioqui enim rationalis est requisitum hominis, sed quia homo est rationalis, ideo rationalis (qui hominis requisitum est) et homo, idem est, etsi enim expressione differant, re tamen conveniunt. Pars inmediatum est requisitum, neque enim connexio inter *AB* et *BC* pendet a quadam consequentia sive connexione causarum, sed ipsa per se patet, ex hypothesi assumti totius [32]. Est autem in recto cum correquisitis, semper enim convenire debet secundum certum quendam considerandi modum, nam et quae ut Entia tantum, imo et ut cogitabilia spectamus, verbi gratia DEUM, hominem, virtutem, possumus considerare velut partes unius totius ex ipsis compositi. Excluduntur ergo requisita immediata quidem et diversa, ut rationalitas in abstracto, quae requisitum est hominis immediatum diversum ; neque enim, nec homo est rationalitas, attamen non hic spectatur ut conveniens cum homine, sed ut attributum : alioqui sane negari non potest, etiam ex his duobus : homo et rationalitas fingi posse unum totum, cuius hae partes. At rationalitas hominis pars non erit, requiritur enim ad hominem in obliquo, seu non convenienti quadam ratione cum aliis, quae ad hominem praeterea requiruntur. Sed haec sunt magis metaphysica nec nisi in eorum gratiam adducuntur, qui notionum intima intelligere desiderant. Simplicius ita definiemus : *Partes* sunt quae requirantur ad unum quatenus cum eo conveniunt.

32. Barré : « Homogeneum esse intelligo… ».

25 Pour reprendre ceci de plus haut [57], nous devons exposer ce que sont la partie et le tout, l'homogénéité, la grandeur, le rapport. Une *Partie* n'est par rapport à un tout qu'un réquisit propre (l'un ne pouvant être prédiqué de l'autre), immédiat, conforme à ses autres co-réquisits. A.B est ainsi le réquisit de A.C, ce qui veut dire que si A.B n'existait pas A.C n'existerait pas non plus. Mais il en diffère, A.C n'étant pas A.B.

Sur un autre plan, rationnel est un réquisit d'homme, mais, l'homme étant rationnel, homme et rationnel (qui en est le réquisit) sont une même chose et, s'ils diffèrent par le nom, ils se rejoignent par l'objet. La partie est un réquisit immédiat car la liaison entre A.B et A.C ne dépend ni d'une déduction ni d'un quelconque enchaînement de causes, mais est en elle-même évidente dès qu'on a posé le tout. Elle est également conforme aux co-réquisits avec lesquels elle doit toujours pouvoir s'accorder selon un certain point de vue déterminé. Les objets que nous considérons comme des Etres, mais aussi ceux que nous considérons comme des objets de pensée, comme DIEU, homme, vertu, nous pouvons les considérer comme des parties de la totalité unique qu'ils forment. Certains réquisits immédiats et propres, comme la rationalité dans l'abstrait, réquisit immédiat et propre de l'homme. Celui-ci n'est pas la rationalité, cependant elle n'est donc pas considérée comme accordée à homme, mais comme un attribut. Il est d'ailleurs indéniable qu'en prenant les deux termes, homme et rationalité, on peut aussi forger un tout unique dont ils soient les parties. Mais la rationalité ne sera pas pour autant une partie de l'homme car elle entre obliquement dans la nature de celui-ci et non selon un rapport de convenance avec ses autres réquisits. Je n'ajoute ces considérations surtout métaphysiques qu'à l'intention de ceux qui voudraient comprendre l'essence intime des notions. Posons plus simplement la définition suivante : les *parties* sont les éléments requis pour constituer un tout en tant qu'ils s'accordent avec lui.

57. C'est-à-dire en remontant aux définitions logiques. L'insertion du développement logique qui suit met en lumière une certaine parenté entre les relations de la caractéristique géométrique et certaines relations utilisées par Leibniz dans ses essais de calcul logique, par exemple la congruence. On doit également voir dans les paragraphes qui suivent une ébauche des développements des *Initia rerum mathematicarum metaphysica* et des *Initia Mathematica* (MS., VII, p. 17-49).

(26) *Numerus* [33] est, cuius ad unitatem relatio est quae inter partem et totum vel totum et partem, quare fractos etiam et surdos comprehendo.

(27) *Magnitudo* Rei distincte cognita est numerus (vel compositum ex numeris) partium rei cuidam certae (quae pro mensura assumitur) congruentium. Ut si sciam esse lineam, quae bis aequetur lateri, ter aequetur diagonali cuiusdam quadrati certi mihique satis cogniti, ut ad ipsum cum lubet recurrere possim, eius lineae magnitudo mihi cognita esse dicetur, quae erit binarius partium lateri congruentium, ternarius partium diagonali congruentium. Diversis autem licet assumtis mensuris, quibus eadem res diversimode exprimitur, tamen semper eadem prodit magnitudo, quia ipsis mensuris iterum resolutis ad idem denique semper devenitur ; adeoque mensurae diversae illum ipsum numerum eundem resolutione prodeuntem jam involvunt. Quemadmodum unus idemque est numerus tres quartae, et sex octavae, si quartam iterum in duas partes resolvas. Atque talis est Magnitudo distincte cognita. Alioquin *magnitudo* est attributum rei, per quod cognosci potest, utrum aliqua res proposita sit illius pars, vel aliud homogeneum ad rem pertinens et quidem tale ut maneat, licet partium habitudo inter se mutetur. Vel etiam Magnitudo est attributum, quod iisdem manentibus homogeneis ad rem pertinentibus aut substitutis congruis, manet idem. Homogenea autem ad rem aliquam pertinentia intelligo non partes solum, sed et extrema atque minima sive puncta. Nam puncti repetitione quadam continua, sive motu, fit linea. Saepe autem res ita transmutantur, ut ne unica quidem pars figurae posterioris, prioris parti congruat. Aliter Magnitudinem infra definio, ut sit id quo duae res similes discerni possunt, sive quod in rebus sola comper-

33. Leibniz a barré trois débuts possibles pour ce paragraphe : « *Magnitudo* est... » ; « *Numerus* totum est, cuius partes sunt unitates vel sunt homogenea... » ; « *Numerus* totum est, cuius partes exprimuntur per unitates... ».

26 Le *Nombre* est ce qui entretient avec l'unité la relation de partie à tout ou de tout à partie, j'englobe donc dans cette définition les fractions et les nombres sourds [58].

27 La notion distincte de la *Grandeur* d'une chose est le nombre (ou une combinaison de plusieurs nombres) de parties congrues à un certain objet fixé (pris comme unité de mesure) [59]. Si je sais par exemple qu'une ligne est égale à deux fois le côté plus trois fois la diagonale d'un certain carré parfaitement connu auquel je puisse me reporter quand bon me semble, on dira que je connais la grandeur de cette ligne et qu'elle consiste en deux parties congrues au côté et en trois parties congrues à la diagonale. Quelles que soient les différentes unités de mesure choisies pour exprimer un même objet de plusieurs façons, elles donnent néanmoins toujours la même grandeur, puisqu'en décomposant à leur tour les unités de mesure on arrive finalement toujours au même résultat, ce qui veut dire que les diverses mesures contiennent déjà implicitement un même nombre, explicité par leur décomposition. C'est ainsi que trois quarts et six huitièmes sont un seul et même nombre, pourvu qu'on redécompose le quart en deux parties. Telle est la notion distincte de la Grandeur. Parmi les divers attributs d'un objet, sa grandeur est par ailleurs celui qui permet de savoir si un autre objet donné en constitue une partie ou un terme homogène, indépendamment des changements internes apportés à la disposition de ses parties. Ou encore la Grandeur d'un objet est celui de ses attributs qui reste le même lorsque les termes homogènes qu'il comporte demeurent les mêmes ou sont remplacés par des termes congrus. Or, par éléments Homogènes relatifs à une chose je ne veux pas dire seulement ses parties mais aussi ses limites et ses éléments minimaux, les points [60]. Une ligne est en effet engendrée par une répétition continue, en d'autres termes un mouvement, de points. Or les choses sont souvent transformées au point qu'entre leur nouvelle figure et la précédente ne subsiste aucune partie congrue. Je donne plus loin une autre définition de la Grandeur comme ce qui permet de différencier deux objets

58. Les *Initia Mathematica* définissent le nombre comme ce qui est homogène à l'unité (MS., VII, p. 31).

59. MS., VII, p. 31. La notion de grandeur comme celle d'égalité suppose donc la congruence.

60. Cette notion sera donc l'objet d'une correction importante, les *Initia rerum mathematicarum metaphysica* précisant qu'une limite ou extrémité n'est pas homogène à l'objet limité. Le rapport entre un objet et ses limites étant celui de termes *homogones* (MS., VII, p. 20).

ceptione discernitur. Sed omnia haec eodem recidunt.

(28) *Ratio ipsius A ad B* nihil aliud est quam numerus [34], quo exprimitur magnitudo ipsius *A*, si magnitudo ipsius *B* ponatur esse unitas. Unde patet Magnitudinem a ratione differre ut numerum concretum a numero abstracto ; est enim magnitudo numerus rerum, nempe partium ; ratio vero est numerus unitatum. Patet etiam rei magnitudinem eandem manere, quacunque assumta mensura per quam eam exprimere volumus ; rationem vero aliam atque aliam fieri pro alia atque alia mensura assumta. Patet etiam (ex definitione divisionis) si numerus magnitudinem exprimens ipsius *A* et alius numerus magnitudinem exprimens ipsius *B* (modo utrobique eadem mensura seu unitas adhibita sit) dividatur, provenire numerum qui est ratio unius ad alterum.

(29) *Aequalia* sunt quorum eadem est magnitudo, seu quae nullo amisso vel accesito [35] congrua reddi possunt.

Minus dicitur quod alterius parti aequale est, id vero quod partem habet alteri aequalem dicitur *Majus*. Hinc pars minor toto, quia parti ipsius, nempe sibi, aequalis est. Signis autem his utemur :

$a \, \Pi \, b$	a aequ. b
$a \lceil b$	a maj. quam b
$a \rceil b$	a min. quam b.

Si pars unius alteri toti aequalis est, reliquae partis in majore magnitudo dicitur *differentia*. Magnitudo autem totius est *summa* magnitudinum partium, vel aliorum partibus eius aequalium.

(30) Si duo sint [36] homogenea (sive si in uno partes assumi possint utcunque, partibus alterius aequales, et idem fieri semper possit et in residuis) neque differentia ulla sit inter ipsa, id est si neque *a* sit majus quam *b*, neque *b* maius quam *a*, necesse est esse aequalia. Transmutentur enim, ut congruant quoad licet, utique aut in uno eorum supererit aliquid, aut congruent, adeoque erunt aequalia. Itaque in his consequentia haec valebit :

a non $\lceil b$, *a non* $\rceil b$. Ergo $a \, \Pi \, b$.

34. Barré : « quidam quo exprimi potest magnitudo ipsius A posito... ».

35. Dans l'édition Gerhardt apparaît « accepto » au lieu de « accesito ».

36. Barré : « homogenea continua, unumque alio... ».

semblables, soit la différence que seule la coperception de deux choses fait apparaître [61]. Mais toutes ces définitions reviennent au même.

28 Le *Rapport de A à B* n'est rien d'autre que le nombre exprimant la grandeur de A en prenant celle de B pour unité [62]. D'où il ressort que la différence entre Grandeur et rapport est celle entre un nombre concret et un nombre abstrait, la grandeur étant un nombre d'objets, en fait de parties, et le rapport un nombre d'unités. Il est clair également que la grandeur d'une chose demeure la même quelle que soit l'unité de mesure dans laquelle nous voulions l'exprimer, alors qu'un rapport se modifie en fonction de l'unité de mesure choisie. De façon aussi évidente (par définition de la division) si l'on divise le nombre exprimant la grandeur de A par un autre exprimant celle de B, le nombre obtenu, à condition d'avoir employé dans les deux cas la même mesure, soit la même unité, constitue le rapport entre les deux.

29 Sont *égaux* des objets de même grandeur, ce qui signifie des objets qu'on peut rendre congrus sans leur retrancher ni leur ajouter quoi que ce soit. On appelle *inférieur* celui qui est égal à une partie de l'autre, *supérieur* celui possède une partie égale à l'autre. La partie est donc inférieure au tout, puisqu'égale à une partie de celui-ci, en fait elle-même. Nous userons des symboles suivants :

$a \, \Pi \, b$	a égal b
$a \lceil b$	a plus grand que b
$a \rceil b$	a plus petit que b.

Une partie d'un objet étant égale à la totalité d'un autre, la grandeur de la partie restante dans le plus grand se nomme *différence*. Quant à la grandeur du tout, elle est la somme des grandeurs des parties ou de celles d'autres objets qui leur soient égaux.

30 Deux objets homogènes (c'est-à-dire tels qu'on puisse choisir dans l'un des parties égales aux parties de l'autre, puis recommencer indéfiniment pour les parties restantes) ne comportant aucune différence, c'est-à-dire tels que *a* n'est pas supérieur à *b* ni *b* supérieur à *a*, sont nécessairement égaux. Modifions-les pour les rendre dans la mesure du possible congrus, dans tous les cas ou bien il subsistera quelque chose dans l'un d'eux, ou bien ils seront congrus et donc égaux ; à ces objets s'applique donc le raisonnement :

a non $\lceil b$, a non $\rceil b$, donc $a \, \Pi \, b$.

61. Cf. infra, § 105.

62. Les *Initia rerum mathematicarum metaphysica* feront du rapport la plus simple des relations, soit celle de deux quantités homogènes, immédiatement perceptible, sans qu'intervienne un troisième terme (MS., VII, p. 23).

(31) *Similia* sunt quae singula per se considerata discerni non possunt, velut duo triangula aequilatera (in fig. 16). Nullum enim attributum, nullam proprietatem in uno possumus invenire, quam non etiam possumus reperire in altero ; et unum ex ipsis appellando a, alterum b, similitudinis ita notabimus : $a \sim b$.

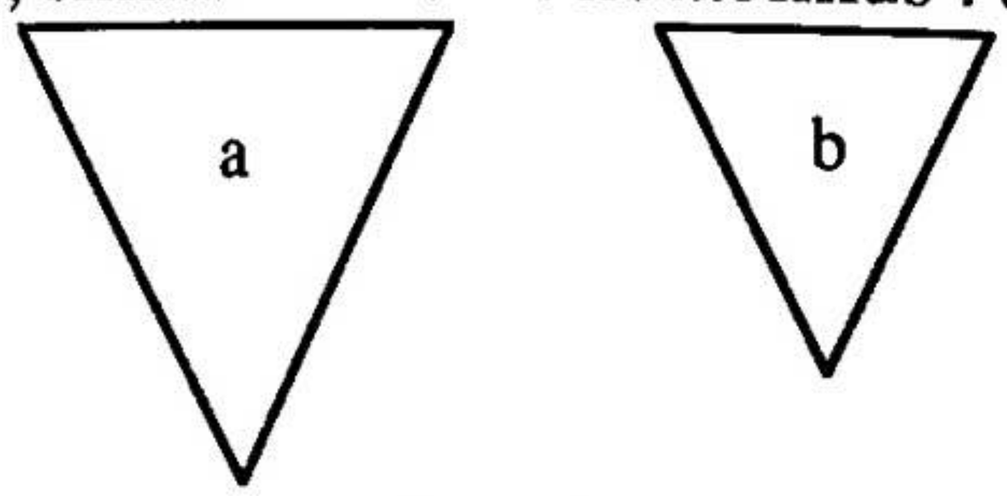


fig. 16

Si tamen simul percipiantur, statim discrimen apparet, unum alio esse maius. Idem fieri potest etsi non simul percipiantur, modo aliquod velut medium assumatur sive mensura quae primum applicetur uni, aut aliquo in ipso, notatoque quomodo prius vel pars eius cum mensura vel eius parte congruat, postea eadem mensura etiam applicetur alteri. Itaque dicere soleo, *similia* non discerni nisi per comperceptionem. At, inquies, ego etsi successive videam duo triangula aequilatera inaequalia, ea nihilominus probe discerno. Sed sciendum est, me hoc loco loqui de intelligentia, ut nimirum mens aliquid notare possit in uno, quod non procedat in altero, non de sensu et imaginatione. Ratio autem, cur oculi duas res similes sed inaequales discernant, manifesta est ; nam supersunt nobis rerum prius perceptarum imagines, quae rei nove perceptae imaginibus applicatae discrimen ipsa comperceptione harum duarum imaginum ostendunt. Et ipse fundus oculi, cuius partem majorem minoremque occupat imago mensurae cuiusdam officium facit. Denique alias res semper simul percipere solemus, quas etiam cum prioribus percepimus, unde rem novissime perceptam ad eas referendo, ut priorem ad easdem retulimus, discrimen non difficulter notamus. Si vero fingeremus, DEUM omnia in nobis ac circa nos in aliquo cubiculo apparentia proportione eadem servata minuere, omnia eodem modo apparerent neque a nobis prior status a posteriore posset discerni, nisi sphaera rerum proportionaliter imminutarum, cubiculo scilicet nostro egrederemur ; tunc enim comperceptione illa cum rebus non imminutis oblata discrimen appareret. Hinc manifestum est etiam, *Magnitudinem* esse illud ipsum quod in

31 On nomme *Semblables* des choses ne pouvant être distinguées par elles-mêmes, deux triangles équilatères par exemple (fig. 16). On ne saurait découvrir en l'une aucun attribut, aucune propriété, qu'on ne découvrirait en l'autre, et en nommant l'une a et l'autre b, nous noterons la similitude a ~ b.

Mais dès qu'elles sont vues ensemble, la différence apparaît aussitôt, l'une est plus grande [63]. Le même phénomène peut intervenir alors même qu'elles ne seraient pas vues simultanément, à condition de choisir un moyen terme, une unité de mesure, d'appliquer cette dernière d'abord à l'une ou à l'une de ses parties et de noter dans quel rapport de congruence elle se trouve avec ce terme intermédiaire ou avec l'une de ses parties avant de l'appliquer à l'autre. C'est ce qui me fait dire que des choses *semblables* ne peuvent être distinguées que dans une coperception. Mais, objectera-t-on, si je voyais successivement deux triangles équilatères inégaux, je les distinguerais tout aussi bien [64]. Il faut savoir que je me place ici sur le plan de l'intellection et de la possibilité pour l'esprit de faire sur l'une une observation qui ne vaille pas pour l'autre, non sur le plan des sens ou de l'imagination. Or le mécanisme qui permet aux yeux de distinguer deux choses inégales est obvie : les images des objets perçus antérieurement persistent en nous et se superposent à celles des objets perçus ensuite, elles font donc voir la différence par une véritable coperception. Et c'est le fond de l'œil lui-même, dont l'image remplit une partie plus ou moins grande, qui fait office pour ainsi dire d'unité de mesure. Enfin d'ordinaire nous voyons toujours différentes choses en même temps que les premières, de sorte qu'en leur comparant ce que nous venons de voir, comme nous leur avions comparé ce que nous avions vu précédemment, nous remarquons sans peine la différence [65]. Imaginons que DIEU rétrécisse tous les phénomènes autour de nous dans le petit département qui nous entoure, mais en conservant leur proportion, ils revêtiraient tous la même apparence et nous ne pourrions distinguer le premier état du second sauf à sortir du cercle des choses qui ont été diminuées proportionnellement c'est-à-dire de notre petit habitacle [66]. Car en ce cas, du fait de la coperception des choses qui se présentent et de celles n'ayant pas subi de rétrécissement, une différence apparaîtrait. Il est

63. Cf. infra, p. 335.
64. Cf. infra, p. 335.
65. C'est par un mécanisme de ce type que Descartes puis Malebranche rendent compte du fait que les astres sont vus plus grands à l'horizon (cf. *Dioptrique*, 6ème Discours, et *La Recherche de la vérité*, I, chap. VII, V).
66. Cf. infra, p. 336.

rebus distingui potest sola comperceptione, id est applicatione vel immediata, sive congruentia actuali sive coincidentia, vel mediata, nempe interventu mensurae, quae nunc uni nunc alteri applicatur, unde sufficit res esse congruas, id est actu congruere posse.

(32) Ex his autem intelligi potest similia et aequalia simul esse congrua. Et quia similitudinem hoc signo notare placet : $\sim$, nempe $a \sim b$, id est a est simile ipsi$b$. Vid. fig. 17. Hinc consequentia erit talis : *$a \sim b$ et $a\, \Pi\, b$. Ergo $a\, \gamma\, b$.*

(33) Sunt et aliae consequentiae :

$a\,\gamma\, b$. Ergo $a\,\Pi\, b$.
$a\,\gamma\, b$. Ergo $a \sim b$.
$a \infty b$. Ergo $a\,\gamma\, b$.
– $a\,\Pi\, b$.
– $a \sim b$.

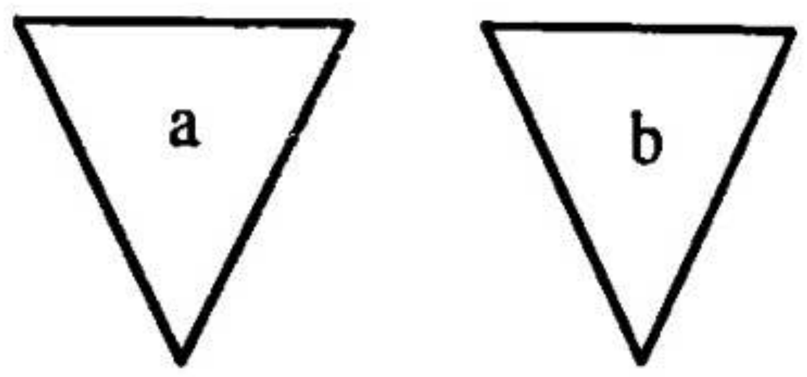


fig. 17

(34) Nam quae reapse coincidunt, utique congrua sunt ; quae congrua sunt utique similia, item aequalia sunt. Hinc videmus tres esse modos ac velut gradus res extensione praeditas, neque alias qualitatibus diversas discernendi. Maximus ille est, ut sint dissimiles, ita enim singulae per se spectatae ipsa proprietatum quae in ipsis observantur diversitate facile discernuntur : ita triangulum isosceles facile discernitur a scaleno, etsi non simul videantur. Si quis enim me jubeat videre, an triangulum quod offertur sit isosceles an scalenum, nihil forinsecus assumere necesse habeo, sed sola latera eius comparo inter se. At vero si jubear, ex duobus Triangulis aequilateris eligere maius, collatione triangulorum cum aliis opus habeo, sive comperceptione, ut explicui, neque notam aliquam discriminis in singulis spectabilem assignare possum. Si vero duae res non tantum sint similes, sed et aequales, id est si sint congruae, etiam simul perceptas non discernere possum, nisi loco, id est nisi adhuc aliud assumam extra ipsas, et observem ipsas diversum habere situm ad tertium assumtum. Denique si ambo simul in eodem sint loco, jam nihil habere me amplius quo discriminentur. Atque haec est vera cogitationum quam de his rebus habemus Analysis, cuius igno-

ainsi manifeste que la *Grandeur* est précisément cette différence que seule une coperception peut faire apparaître [67] entre plusieurs choses, par une superposition soit immédiate, donc une congruence effective, une coïncidence, soit médiate, nécessitant une unité de mesure superposée tantôt à l'une tantôt à l'autre ; il suffit donc que les choses soient congrues, c'est-à-dire puissent concorder effectivement.

32 Cela permet de comprendre que des choses à la fois semblables et égales sont congrues ; il m'a semblé judicieux de représenter la similitude par le signe $\sim$, c'est-à-dire par a $\sim$ b ou a semb. b (fig. 17), l'inférence sera : a $\sim$ b et a Π b, donc a γ b.

33 Il existe d'autres inférences :

a γ b entraîne a Π b
a γ b entraîne a $\sim$ b
a ∞ b entraîne a γ b
… a Π b
… a $\sim$ b.

34 Des choses qui coïncident effectivement sont en effet à coup sûr congrues, celles qui sont congrues sont à coup sûr semblables et égales. Nous voyons à partir de là qu'il y a trois manières et, pourrait-on dire, trois degrés pour discerner des objets doués d'étendue et ne comportant aucune différence qualitative [68]. Le plus haut degré est la dissemblance, il suffit alors de les observer un par un pour que leurs propriétés intrinsèques les différencient aisément ; on distingue par exemple aisément un triangle isocèle d'un triangle scalène, sans même les voir ensemble. Me montre-t-on un triangle en me demandant s'il est isocèle ou scalène, je ne juge pas nécessaire l'intervention d'un élément extrinsèque et je n'ai qu'à comparer les côtés entre eux ; alors qu'en présence de deux Triangles équilatères, si on me demande de choisir le plus grand, je dois les comparer, donc, comme je l'ai montré, les voir ensemble ; il m'est impossible de relever sur chacun d'eux séparément un élément de discrimination sensible. Mais deux choses étant non seulement semblables mais aussi égales, c'est-à-dire congrues, je ne puis, alors même que je les perçois ensemble, les discerner que spatialement, en remarquant leur situation différente à l'égard d'un troisième terme encore nouveau, choisi en dehors d'elles. Enfin, si deux choses étaient dans le même lieu, plus rien ne me permettrait de les distinguer plus avant. Telle est la véritable Analyse dont je dispose

67. Leibniz omet la différence de situation locale qu'il reprendra en compte au § 34.

68. Au sens d'une qualité physique.

ratio fecit, ut characteristica geometriae vera hactenus non sit constituta. Ex his denique intelligitur, ut magnitudo aestimatur, dum res congruere aut ad congruitatem reduci posse intelliguntur, ita rationem aestimari similitudine, seu dum res ad similitudinem reducuntur, tunc enim omnia fieri necesse est proportionalia.

(35) Ex his explicationibus coincidentium, congruorum, aequalium ac similium consequentiae quaedam duci possunt. Nempe quae sunt eidem aequalia, similia, congrua, coincidentia, sunt etiam inter se, ideoque

$a \infty b$	et	$b \infty c$	Ergo	$a \infty c$
$a \gamma b$	–	$b \gamma c$	–	$a \gamma c$
$a \sim b$	–	$b \sim c$	–	$a \sim c$
$a \Pi b$	–	$b \Pi c$	–	$a \Pi c$

Non tamen consequentia haec valet

a non ∞b et *b non* ∞c Ergo *a non* ∞c,

prorsus ut in Logica ex puris negativis nihil sequitur.

(36) Si coincidentibus sive iisdem ascribas coincidentia, prodeunt coincidentia, ut $a \infty c$ et $b \infty d$. Ergo $a.b \infty c.d.$ [37]

Sed in congruis hoc non sequitur, exempli causa si *A. B. C. D.* sint puncta, semper verum est esse $A \gamma C$ et $B \gamma D$; quodlibet enim punctum cuilibet congruum est. Sed non ideo dici potest $A.B \gamma C.D$, id est simul congruere posse *A* ipsi *C* et *B* ipsi *D*. servato nimirum tum situ *A.B*, tum situ *C.D*. Quanquam vice versa ex positis $A.B \gamma C.D$ sequatur $A \gamma C$ et $B \gamma D$ ex significatione characterum nostrorum, idque etiam verum est, licet *A. B. C. D.* non sint puncta, sed magnitudines. At si congrua sibi ascribantur, inde oriuntur aequalia, ita : $a+b-c \; \Pi \; d+e-f$, *posito esse* $a \gamma d$ *et* $b \gamma e$ *etc.* γf, quia congrua semper aequalia sunt.

37. Barré : « Idem est de congruis, quia nihil aliud sunt quam potentia coincidentia : $A \gamma C$ et $B \gamma D$ ergo $A.B \gamma C.D.$ »

pour tout ceci et c'est pour l'avoir ignorée que nous n'avons pas encore jusqu'ici fondé de véritable caractéristique géométrique [69]. Tout ceci nous fait enfin comprendre que d'un côté le fait de découvrir que des objets sont congrus, ou peuvent être rendus tels, constitue une estimation de leur grandeur, et que de l'autre l'étude de la similitude constitue une estimation de leur rapport, puisqu'en faisant apparaître une similitude entre certaines choses on fait nécessairement apparaître une proportionnalité entre tous leurs éléments.

35 Ces définitions de la coïncidence, de la congruence, de l'égalité et de la similitude, conduisent à certaines inférences : des objets égaux semblables, congrus, coïncidents, avec un même objet, le sont aussi entre eux [70], d'où :

$a \infty b$	et	$b \infty c$	entraîne	$a \infty c$
$a \gamma b$	et	$b \gamma c$	entraîne	$a \gamma c$
$a \sim b$	et	$b \sim c$	entraîne	$a \sim c$
$a \Pi b$	et	$b \Pi c$	entraîne	$a \Pi c$.

Mais l'inférence a non ∞ b et b non ∞ c donc a non ∞ c n'est pas valide, pas plus qu'en Logique on ne peut conclure à partir de prémisses purement négatives.

36 Si à des termes coïncidents ou identiques ou ajoute des termes coïncidents, de nouvelles coïncidences se produisent, par exemple :

$a \infty c$ et $b \infty d$ entraîne $a.b \infty c.d$ [71].

Mais cette conséquence ne vaut pas pour des termes congrus. Soient par exemple les points A, B, C, D, il est toujours vrai que $A \gamma C$ et $B \gamma D$, puisque tout point est congru à tout autre, mais on ne peut en déduire $A.B \gamma C.D$ c'est-à-dire la possibilité d'une congruence simultanée entre A, C et B, D, sans modification de leur situation ; alors que réciproquement, si l'on pose $A.B \gamma C.D$, en résulte nécessairement, par définition de nos caractères, $A \gamma C$ et $B \gamma D$, et ceci alors même que A, B, C, D, ne seraient pas des points [72] mais des grandeurs.

En ajoutant des termes deux à deux congrus, on aboutit à une égalité, par exemple : $a \gamma d$, $b \gamma e$, *et* $c \gamma f$, *entraîne* $a+b-c \; \Pi \; d+e-f$, puisque des termes congrus sont toujours égaux.

69. Aux degrés de différenciation des figures correspondent en effet les trois relations, similitude, congruence, coïncidence, dont les paragraphes suivants établissent la classification en fonction de leurs propriétés opératoires.

70. Les quatre relations sont transitives.

71. Barré : « Il en va de même pour la congruence qui n'est rien d'autre qu'une coïncidence potentielle : $A \gamma C$ et $B \gamma D$ donc $A.B \gamma C.D$ »

72. Pour lesquels les relations $A \gamma C$ et $B \gamma D$ sont toujours vraies.

(37) Verum si congrua congruis similiter addantur adimanturque, fient congrua. Cuius rei ratio est, quia si congrua congruis similiter addantur, similia similibus similiter addentur (quia congrua sunt similia), ergo fient similia, fiunt autem etiam aequalia (nam congrua congruis addita faciunt aequalia) ; jam similia et aequalia sunt congrua. Ergo *si congrua congruis similiter addantur, fient congrua*. Idem est si adimantur.

(38) An autem similiter aliqua tractentur, intelligi potest ex characteristicis nostris modoque unumquodque describendi aut determinandi, in quo si sigillatim nullum discrimen notari potest, utique semper omnia similia prodire necesse est. Illud quod notandum est, *si qua sint similia secundum unum determinandi* (distincte cognoscendi, describendi) *modum, eadem fore similia etiam secundum alium modum*. Nam unusquisque determinandi modus totam rei naturam involvit.

(39) Axiomata autem illa quibus Euclides utitur, si aequalibus addas aequalia, fient aequalia, aliaque id genus, facile ex eo demonstrantur, quod aequalium eadem est magnitudo, id est quod substitui possunt salva magnitudine. Nam sint *a Π c et b Π d, fiet +a+b Π c+d*, nam si scribatur *a+b* et in locum ipsorum *a. b.* substituantur aequalia *c. d.*, ea substitutio fiet salva magnitudine, ac proinde eorum quae prodibunt *+c+d* eadem erit magnitudo quae priorum *+a+b* [38]. Sed haec ad calculum Algebraicum potius pertinent, satisque explicata habentur, itaque regulis magnitudi-

38. Barré : « Hoc solo substituendo artificio etiam… »

37 En ajoutant et en ôtant à des termes congrus d'autres termes congrus, d'une façon semblable [73], on obtient deux termes congrus. La raison en est qu'ajouter des termes congrus à des termes congrus de façon semblable reviendra à ajouter de façon semblable des termes semblables à des termes semblables (la congruence impliquant la similitude), ce qui produira des termes à la fois semblables et égaux (puisque des termes congrus ajoutés à d'autres termes congrus donnent des termes égaux) ; or des termes à la fois semblables et égaux sont congrus, donc *en ajoutant de façon semblable des termes congrus à des termes congrus, on obtient deux sommes congrues.* De même pour la soustraction.

38 Les caractères et la méthode que nous avons adoptés pour décrire et déterminer chaque terme permettent en outre de décider si entre des termes donnés l'opération est menée de manière similaire [74] : à supposer que ces termes pris individuellement ne comportent aucune différence, ils donneront toujours nécessairement des résultats semblables. Remarquons également ceci : *si un certain mode de détermination,* c'est-à-dire de description et de connaissance distincte, *produit des termes semblables, ces termes seront aussi semblables dans un autre mode de détermination.* Car chaque mode de détermination enveloppe toute l'essence de la chose [75].

39 Il est facile de démontrer les axiomes utilisés par Euclide, entre autres celui-ci : en ajoutant des grandeurs égales à des grandeurs égales, on obtient des grandeurs égales [76], on le démontre aisément à partir du fait que des termes égaux ont même grandeur, ce qui signifie qu'on peut, sans modifier celle-ci, les substituer l'un à l'autre [77]. Soit en effet a Π c et b Π d, il viendra : a+b Π c+d, puisque, si dans la formule a+b on remplace a et b par c et d qui leur sont égaux, cette substitution se fera sans modification de la grandeur, la somme +c+d qui en résultera aura donc même grandeur que la première. Ces résultats concernent d'ailleurs surtout le calcul Algébrique et sont considérés comme assez bien connus, je ne m'attarderai donc pas sur

73. Cf. supra VII, note 16.
74. Cf. supra VII, note 16.
75. En d'autres termes, la relation métagéométrique de détermination préserve les relations géométriques, cf. supra VII, note 12.
76. Livre I, Axiome 2.
77. Cette proposition montre que le premier but des définitions et des raisonnements des §§ 23-38 n'était autre que la recherche de nouveaux fondements (ou principes) pour la Géométrie, lui permettant ensuite de démontrer quelques axiomes des *Eléments*.

num ac rationum atque proportionum non immorabor ; sed ea maxime explicare nitar, quae situm involvunt.

(40) Redeo nunc ad ea quae § 22 interrupta sunt, et primum de punctis, inde de Tractibus agam. Omne punctum puncto congruum adeoque aequale (si ita loqui licet) et simile est :

A γ B , *A Π B* , *A ~ B*.

(41) *A.B γ C.D* significat simul esse *A γ C* et *B γ D.* manente situ *A.B* et *C.D.* [39]

(42) *A.B γ B.A* est propositio cuius est sensus, positis duobus punctis *A.B.* ac situm eundem inter se retinentibus, posse loca eorum permutari, seu poni *A* in locum *B*, et contra. Quod ex eo manifestum est, quia relatio situs quam habent ad ambo eodem modo pertinet, nec nisi externis assumtis discrimen ullum notari potest facta permutatione [40].

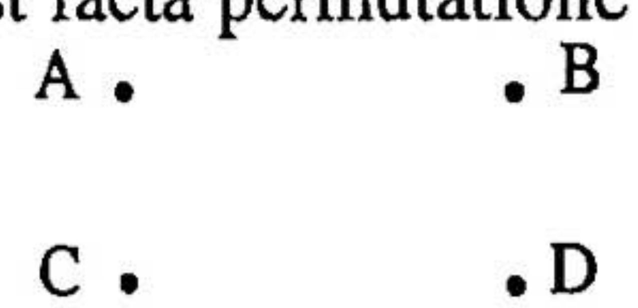


fig. 18

fig. 19

(43) [41] *A.B γ X.Y* est propositio significans, datis duobus punctis *A* et *B* posse reperiri alia duo *X* et *Y* quae eundem inter se situm habeant quem illa duo, sive ut haec simul illis duobus

39. Barré : « *A.B γ A.Y* est propositio quae significat positis duobus punctis *A.B* posse reperiri tertium aliquod *Y* (quod ideo quia indefinitum, hac litera significavi) tale ut servato situ *A.Y.* et *A.B.* ipsa *A.Y* et *A.B* sibi applicari possint, nempe simul *A* ipsi *A*, et *B* ipsi *Y*. *A* manet ipsi *A* (id est *A* manente ubi erat) et *B* ipsi *Y*. »

40. Barré : « *A.B γ C.Y* est propositio significans datis tribus punctis *A. B. C.* inveniri posse quartum *Y*. cuius situs ad unum ex ipsis *C*. idem sit qui situ reliquorum duorum *A.B.* inter se sive ut *A* ipsi *C* et *B* ipsi *Y* simul servato situ *AB* et *CY* congruere possint. Hinc sequitur et *A.B γ A.Y* posito *C ∞ A*. Ratio autem horum oritur ex natura spatii in quo nihil sumi potest, quod non iterum sumi possit eodem plano modo, ita ut solum discrimen sit in loco. Idem per motum sic demonstratur, transferatur simul *A.B.* servato situ, et *A* quidem incidat in locum ipsius *C*, utique *B* in cuiusdam puncti *Y* locum incidet. Eodem modo demonstratur *A.B. γ X.Y.* »

41. Dans l'édition Gerhardt, on change l'ordre de § 43 et § 44, par rapport au manuscrit. Le § 44 a été écrit en marge, d'où l'erreur de Gerhardt : à première vue, il semble commencer avant le § 43. Nous maintenons l'ordre suivi par Leibniz, d'ailleurs justifié par les deux dernières lignes de la note precédente.

les règles du calcul des grandeurs, des rapports et des proportions, pour chercher surtout à développer celles ayant trait à la situation.

40 Revenons à présent où nous en étions restés au § 22, je m'occuperai d'abord des points puis des Tracés. Tout point est congru à tout autre et lui est donc en quelque sorte égal et semblable,

A γ B, A Π B, A ~ B.

41 A.B γ C.D signifie à la fois A γ C et B γ D, la situation de A.B et C.D restant la même (fig. 18) [78].

42 La proposition A.B γ B.A signifie que deux points A, B étant donnés, on peut, en préservant leur situation mutuelle, mettre l'un à la place de l'autre, c'est-à-dire remplacer B par A et réciproquement ; cela est évident du fait qu'ils jouent le même rôle dans le rapport de situation qui est le leur et que leur permutation ne fait apparaître aucune différence, sauf à faire intervenir des termes extrinsèques [79].

43 La proposition A.B γ X.Y signifie que deux points A, B étant donnés, on peut en trouver deux autres X et Y possédant mutuellement la même situation et susceptibles de leur être simultanément congrus, la

78. Barré : « La proposition A.B γ A.Y signifie que les deux points A B étant donnés, on peut en trouver un troisième Y (que j'ai noté ainsi parce qu'il est indéterminé) tel que les situations A.Y et A.B étant inchangées, A.Y et A.B puissent être appliqués l'un sur l'autre, c'est-à-dire A appliqué à A et B appliqué à Y, ou encore A rester en A (soit là où il était) et B être appliqué à Y. » En explorant systématiquement les relations de congruence, Leibniz prépare la définition des figures comme ensemble des lieux vérifiant une équation.

79. Barré : « La proposition A.B γ C.Y signifie que trois points A B C étant donnés, on peut en trouver un quatrième dont la situation à l'égard de l'un d'eux, C, soit la même que la situation mutuelle des deux autres A et B, c'est-à-dire tel que A puisse être congru à C et simultanément B à Y, sans modification des situations AB et CY. Il s'ensuit que C ∞ A entraîne A.B γ A.Y. La raison de ceci tient à la nature de l'espace et au fait que dès que quelque chose y est présent, on peut déterminer une autre chose exactement de la même manière, de sorte que leur seule différence soit une différence de lieu. On peut aussi le démontrer par le mouvement, déplaçons simultanément A.B. en préservant leur situation et de façon que A parvienne au lieu de C, B parviendra au lieu d'un certain point Y. On démontre de la même manière que A.B γ X.Y. »

servato situ utrobique, congruere possint. Quod ex eo demonstratur, quia *L.M, A.B* moveri possunt servato situ inter se, eaque respondere poterunt primis ipsis *A.B*, deinde ipsis *X.Y.*, nempe *3L.3M.γ 6L.6M.* Sit *A* ∞ *3L.*, *B* ∞ *3M.*, *X* ∞ *6L.*, *Y* ∞ *6M.*, fiet *A.B γ X.Y.* Nihil autem prohibet esse *X* ∞*A* : unde fiet *A.B γA.Y.* Potest etiam esse *X* ∞*C* datae, unde *A.B γC.Y.*

(44) *Si A.B γ D.E et B.C γ E.F et A.C γ D.F erit A.B.C γD.E.F.* Vid. fig. 20.

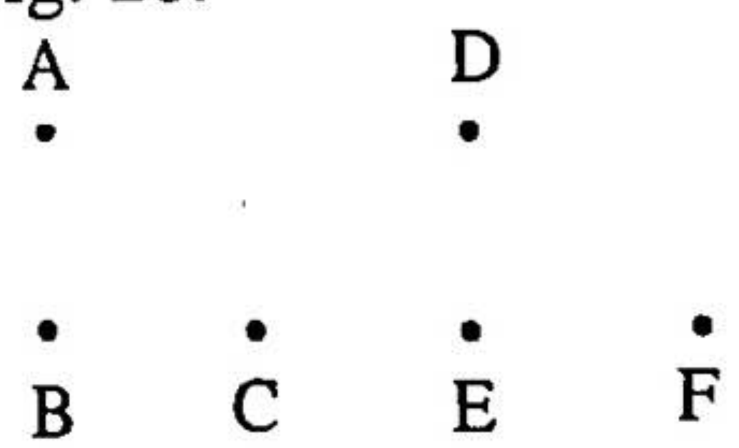


fig. 20

Nam nihil aliud significat [42] *A.B γD.E* quam simul esse *A γD* et *B γE.* situ *A.B* et *D.E* servato. Eodem modo ex *B.C γE.F* sequitur *B γE* et *C γF* situ *B.C* et *E.F* servato ; et ex *A.C γD.F* sequitur *A γD* et *C γF* situ *A.C* et *D.F* [43] servato. Habemus ergo simul *A.B.C γ D.E.F* servato situ *A.B* et *B.C* et *A.C.*, itemque servato situ *D.E* et *E.F* et *D.F* cum alias ex solis *A.B γD.E* et *B.C γE.F.* sequatur quidem simul *A γD* et *B γE* et *C γF.* Sed servatis tantum sitibus *A.B* et *B.C* item *D.E* et *E.F* non vero exprimetur servari et situs *A.C* et *D.F.*, nisi addatur *A.C γD.F.* Hinc jam principium habemus ratiocinationem ad plura etiam puncta producendi.

(45) [44] *Si sit A.B γB.C γA.C erit A.B.C γ B.A.C.*, vel alio ordine quocunque [45]. Nam si congruentibus *A.B* et *(B).(A)* ascribas congruentia *C* et *(C)* congruenti modo quia *A.C γ(B).(C)* et *B.C γ (A).(C)* fient congruentia *A.B.C γ (B).(A).(C)* sive

---

42. Barré : « *A.B.C γD.E.F* quam simul congruere, *A γD* et... ».

43. Par erreur de Leibniz (non remarquée par Gerhardt) on lit « D.E » au lieu de « D.F » deux fois dans cette proposition.

44. Barré : « Si *A.B γC.D* erit *A.B~ C.D.* Patet ex eo quod congrua sunt similia. »

45. Barré : « Nam quia *B.C γA.B seu γB.A* ergo simul congruent *B.C* et *B.A.* Nam transferatur *A.B.C* in *(B).(A).(C)* ita ut *A.B.* incidat in

situation des uns et des autres demeurant inchangée. La démonstration repose sur le fait qu'on peut déplacer des points L, M sans changer leur situation mutuelle, ils pourront donc correspondre d'abord à A.B puis à X.Y, en d'autres termes : 3L3M γ 6L6M, avec A ∞ 3L, B ∞ 3M, X ∞ 6L, Y ∞ 6M, entraînera A.B γ X.Y. Mais rien n'empêche qu'on ait X ∞ A, ce qui donnera A.B γ A.Y. Rien n'empêche non plus que pour un C donné X ∞ C d'où A.B γ C.Y.

44 A.B γ D.E, B.C γ E.F et A.C γ D.F entraîneront A.B.C γ D.E.F (fig. 20).

Car A.B γ D.E signifie précisément à la fois A γ D et B γ E, sans modification des situations A.B et D.E [80] ; de même B.C γ E.F entraîne B γ E et C γ F, les situations B.C et E.F demeurant inchangées, enfin A.C γ D.F entraîne A γ D et C γ F, les situations A.C et D.F demeurant les mêmes. Nous avons donc à la fois A.B.C γ D.E.F, les situations A.B, B.C, A.C ainsi que D.E, E.F, et D.F restant les mêmes. Au contraire les propositions A.B γ D.E et B.C γ E.F entraînent bien à la fois A γ D, B γ E et C γ F, mais impliquent seulement l'invariance des situations A.B, B.C ainsi que D.E et E.F, or ceci ne signifierait pas que les situations A.C et D.F soient conservées si l'on n'ajoutait A.C γ D.F. Ceci nous fournit d'ores et déjà le principe permettant d'étendre le raisonnement à un plus grand nombre de points [81].

45 [82] A.B γ B.C γ A.C entraînera A.B.C γ B.A.C, ceci restant vrai quel que soit l'ordre des lettres [83] (fig. 21).

Si aux termes deux à deux congrus A.B et (B).(A) on ajoute de façon congrue C et (C) eux-mêmes deux à deux congrus, compte tenu de A.C γ (B).(C) et B.C γ (A).(C), on obtiendra des termes congrus A.B.C γ (B).(A).(C), soit encore, d'après ce qui précède :

---

80. Cette notation de la relation a été introduite dans le fragment VII.

81. Principe explicité plus bas (§ 53) puis dans la lettre à Huygens : « L'ensemble des conséquents renferme la totalité de l'antécédent », une congruence entre deux combinaisons de n points n'est acquise que si toutes les congruences entre les combinaisons de n–1 points sont vérifiées.

82. Barré : « Si A.B γ C.D on aura A.B ~ C.D. Ceci résulte clairement du fait que des objets congrus sont semblables. »

83. Barré : « En effet B.C γ A.B seu γ B.A entraîne la congruence simultanée de *B.C* et *B.A*. En effet transportons *A.B.C* en *(B).(A).(C)* de sorte que *A.B.* tombe en *(B).(A)*, ceci est toujours possible puisque A.B γ B.A, soit A.B ∞ (B).(A), que B.C γ A.C et B ∞ (A). »

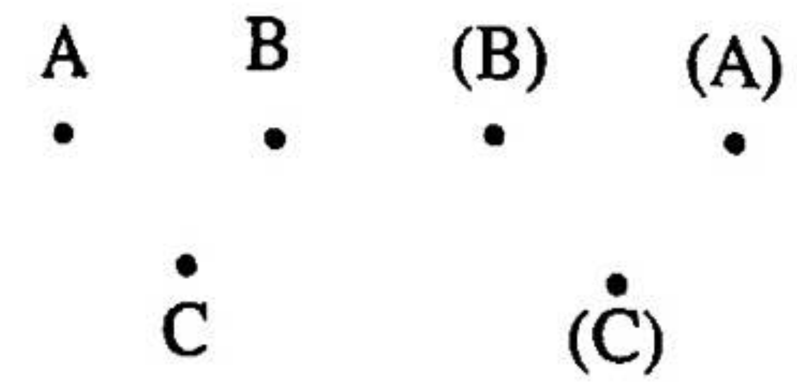


fig. 21

A.B.C γ B.A.C per praecedentem. Parentheses enim tantum confusionis ex repetitione vitandae causa ascripsi. Hinc patet quid sit congruenti, modo ascribi, cum scilicet omnes combinationes ab una parte enuntiationis sunt congruentes omnibus ab altera parte. Unde patet si *A.B γ B.C γ A.C* fore

A.B.C γ A.C.B γ B.C.A γ B.A.C γ C.A.B γ C.B.A.

(46) *Si A.B.C γ A.C.B sequitur (tantum) A.B γ A.C* (sive triangulum esse isosceles), nam sequitur :

A^B^C   *A.B γ A.C B.C γ C.B. A.C γ A.B*
γ   ex quibus *B.C γ C.B.* per se patet, reliqua duo,
A‿B‿C   *A.B γ A.C.* et *A.C γ A.B.* eodem recidunt, hoc unum ergo inde duximus *A.B γ A.C* .

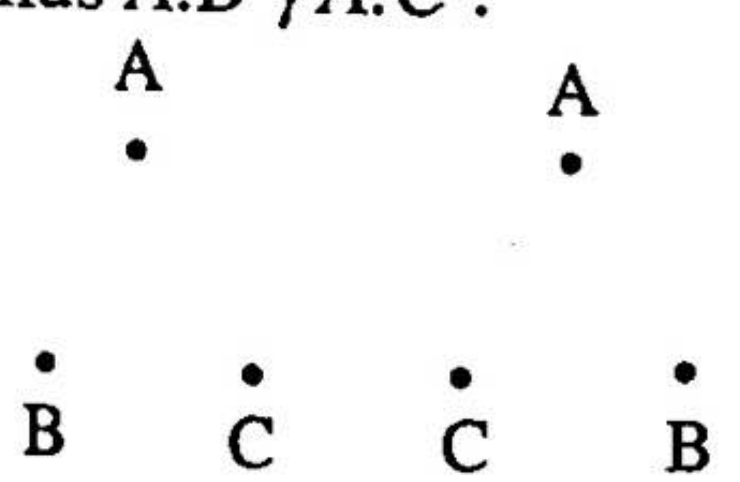


fig. 22

(47) [46] *Si A.B.C γ B.C.A sequitur A.B γ B.C γ A.C* (seu triangulum esse aequilaterum). Nam fit *A.B γ B.C, B.C γ C.A.*

(48) *Si A.B.C γ A.C.B et B.C.A γ B.A.C fiet A.B γ B.C γ A.C.* Nam ob *A.B.C γ A.C.B.* fit *A.B γ A.C.* eodemque modo ob *B.C.A γ B.A.C.* fit *B.C γ B.A.* sive *A.B. γ B.C.* (itaque quandocunque in transposito punctorum ordine, unum ex tribus eundem in utroque ordine locum servat, situsque posterior priori congruus est, inde tantum probari potest triangulum esse isosceles, sed si nullum ex punctis servat locum, et nihilominus situs posterior priori congruit, Triangulum est aequilaterum).

locum ipsius *(B).(A)*, quod fieri potest, quia *A.B γ B.A* seu *A.B ∞ (B).(A)* et quia *B.C γ A.C* et *B ∞ (A)* . »

46. Barré : « Si *A.B.C γ A.C.B γ B.C.A* fiet *A.B γ A.C γ A.C* nam ob *A.B.C γ A.C.B* fit *A.B γ A.C* . »

A.B.C γ B.A.C. La seule utilité des parenthèses est d'éviter la confusion qu'entraînerait la répétition des mêmes lettres. On voit donc bien ce que signifie opérer d'une manière congrue [84], dans la mesure où toutes les combinaisons du premier membre de la proposition sont congrues à toutes celles du second. D'où il ressort que

A.B γ B.C γ A.C entraînera

A.B.C γ A.C.B γ B.C.A γ B.A.C γ C.A.B γ C.B.A.

46 *A.B.C γ A.C.B implique (seulement) A.B γ A.C* (triangle isocèle), on a en effet

A^B^C   implique A.B γ A.C, B.C γ C.B ; A.C γ A.B.
γ   Or parmi ces relations, B.C γ C.B est évidente,
A‿B‿C [85]   les deux autres A.B γ A.C et A.C γ A.B sont équivalentes. Nous avons donc obtenu en tout et pour tout A.B γ A.C.

47 A.B.C γ B.C.A implique A.B γ B.C γ A.C (triangle équilatère). Nous avons en effet A.B γ B.C, B.C γ CA.

48 A.B.C γ A.C.B et B.C.A γ B.A.C entraîneront

A.B γ B.C γ A.C, car A.B.C γ A.C.B donne A.B γ A.C et de la même façon B.C.A γ B.A.C donne B.C γ B.A, soit encore A.B γ B.C. (Ainsi chaque fois qu'une permutation de l'ordre des points laisse l'un d'eux invariant et que la seconde combinaison est congrue à la première, ceci permet seulement de prouver que le triangle est isocèle ; mais si aucun des points ne reste à la même place, la seconde combinaison restant congrue à la première, le Triangle est équilatère).

La démarche suivie par Leibniz à partir de l'introduction des caractères est combinatoire. Il a étudié tout d'abord les relations géométriques (coïncidence, congruence, similitude, égalité) pour les points isolés (§§29-37), puis pour des couples de points (en supposant un *situs* invariant entre eux) ; il s'occupe par la suite d'ensembles de trois et de quatre points. En combinant des points donnés et indéterminés (variables) il obtient parfois des axiomes (identité, commutativité, associativité, etc.), parfois des définitions de figures ou de notions géométriques mais parvient aussi à exprimer des problèmes géométriques nouveaux ou à réduire à ses caractères quelques théorèmes, propositions ou axiomes d'Euclide. L'analyse des notions géométriques (accomplie au moyen de mots et notamment de définitions) conduit, lorsqu'on a choisi une Caractéristique convenable (c'est à dire le système de notations introduit aux §§ 29-33), à la phase finale de synthèse. Chez Leibniz, la méthode mathématique de synthèse devrait être toujours combinatoire (une *cogitatio caeca*). La validité de l'analyse préalable et de la Caractéristique choisie apparaît dans la dernière phase de synthèse, lorsqu'on arrive (si l'on a réussi) à démontrer des théorèmes et des axiomes déjà connus où à proposer de nouveaux axiomes, théorèmes, problèmes et objets géométriques.

84. Cf. supra, note 59.

85. Nouvelle notation de la relation se substituant au point.

(49) *Si sit* $A.B \ \gamma\ B.C \ \gamma\ C.D \ \gamma\ D.A$ *et* $A.C \ \gamma\ B.D$ *erit*
$A.B.C.D \ \gamma B.C.D.A \ \gamma C.D.A.B \ \gamma D.A.B.C$
$\gamma D.C.B.A \ \gamma A.D.C.B \ \gamma B.A.D.C \ \gamma C.B.A.D$.

fig. 23

Hoc ex praecedentibus facile demonstratur, multaque alia hujusmodi, quae sufficiet demonstrari, cum ipsis indigebimus. Nunc satis habebimus principium dedisse inveniendi haec solo calculo, sine inspectione figurae.

(50) Si tria puncta *A. B. C.* dicantur esse *sita in directum*, tunc posito $A.B.C \ \gamma A.B.Y$ erit $C \infty Y$. Haec propositio est definitio punctorum quae in directum sita dicuntur.

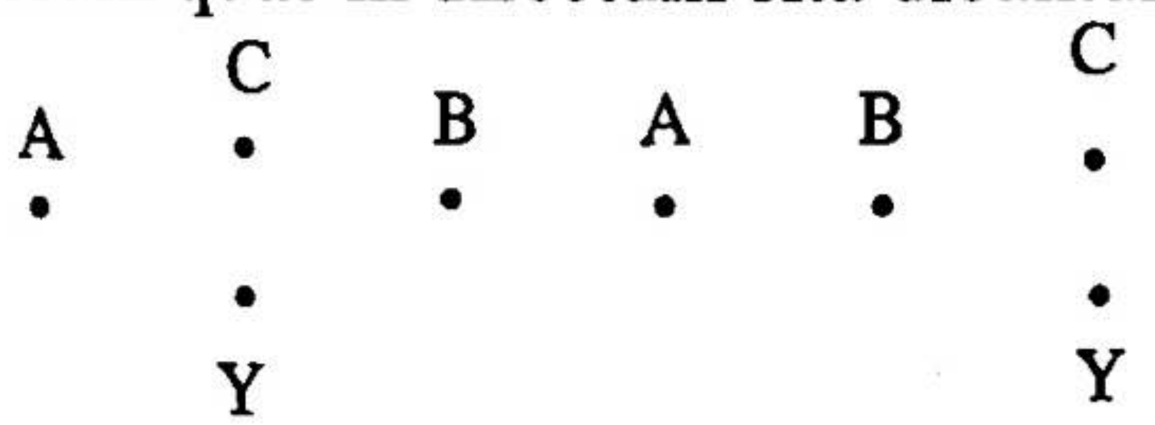


fig. 24

Nimirum inspiciatur fig. 24 ubi *C.* aliquem situm habet ad *A.* et *B.* ; sumatur jam aliquod punctum *Y* eundem ad *A.B.* situm habens, id si diversum ab ipso *C.*, assumi potest puncta *A. B. C.* non sunt in directum sita, si vero necessario cum ipso *C.* coincidit, in directum sita dicentur.

(51) Datis punctis duobus semper assumi potest tertium quod cum illis sit in directum, sive si $A.B.Y \ \gamma A.C.X$ erit $Y \infty X$. Nam datis punctis duobus *A. B.* semper assumi potest tertium *Y.*, quod servato ad ipsa situ moveri potest ipsis immotis. Sed via quam motu suo describit potest esse semper minor ac minor, prout aliter atque aliter assumitur punctum *Y.*, adeoque tandem sumi poterit tale, ut spatius motus evanescat, et tunc tria puncta erunt in directum. Melius forte sic enuntiabimus : $A.B.3Y \ \gamma A.B.6Y$ erit $3Y \infty 6Y$, id est aliquod assignari posse *Y* quod servato situ ad *A.B.* moveri seu locum mutare nequeat. Aliter ista videor demonstrare posse hoc modo : Sit aliquod extensum, quod moveatur servato punctorum eius situ inter se et duobus in eo sumtis punctis immotis. Nam si quis id neget moveri posse, eo ipso fatetur, puncta eius

49 $A.B \gamma B.C \gamma D.C \gamma D.A$ et $A.C \gamma B.D$, entraînera :
$A.B.C.D \gamma B.C.D.A \gamma C.D.A.B \gamma D.A.B.C \gamma D.C.B.A$
$\gamma A.D.C.B \gamma B.A.D.C \gamma C.B.A.D$.

Les résultats précédents permettent facilement de démontrer cette relation ainsi que beaucoup d'autres de même nature, que nous nous contenterons d'établir lorsque nous en aurons besoin. Il me suffira pour l'instant d'avoir fourni le moyen de les découvrir par le seul calcul sans avoir de figures à examiner [86].

50 Trois points A.B.C sont par définition *alignés* si $A.B.C \gamma A.B.Y$ entraîne $C \infty Y$. Cette proposition constitue la définition des points alignés [87].

Examinons donc la fig. 24 et la situation de C par rapport à A et B ; prenons un point quelconque Y ayant la même situation par rapport à A et B, s'il est possible de le choisir différent de C, les points A, B, C ne sont pas alignés, si au contraire il coïncide nécessairement avec C, on dira qu'ils le sont.

51 Deux points étant donnés, on peut toujours en choisir un troisième aligné avec eux, de sorte que $ABY \gamma ABX$ entraîne $Y \infty X$. En effet, deux points A, B étant donnés, on peut toujours en choisir un troisième Y susceptible de se déplacer en conservant la même situation à l'égard de ces deux points immobiles. Mais la trajectoire qu'il décrit dans son mouvement peut devenir, selon le choix de Y, de plus en plus petite, on pourra donc finalement le choisir tel que sa marge de mouvement s'évanouisse, les trois points seront alors alignés [88]. Il sera peut-être préférable de dire $AB3Y \gamma AB6Y$ entraîne $3Y \infty 6Y$, c'est-à-dire : il est possible de choisir un certain Y qui ne puisse se déplacer et changer de lieu tout en gardant sa situation à l'égard de A.B. Je crois qu'on peut le démontrer autrement de la manière suivante : considérons le mouvement d'un extensum conservant la situation mutuelle de ses points et laissant invariants deux points donnés [89]. Nier la possibilité d'un tel mouvement reviendrait à dire que les points de cet

86. Leibniz souligne l'aspect combinatoire et purement symbolique de sa nouvelle Caractéristique, qui lui permet de prouver des théorèmes sans recourir aux figures.

87. Reprise de la définition de la droite par la détermination, mise au point dans le fragment V.

88. Il s'agit ici d'une nouvelle démonstration de la possibilité de la droite, fondée sur le principe de continuité dont la validité est présupposée. Les points Y gardant la même situation à l'égard de A et B décrivent un cercle dans l'espace. Par passage à la limite ce cercle s'évanouit en un point. Leibniz fait donc appel à des méthodes mathématiques de plus en plus puissantes.

89. Ici encore la définition de la droite entraîne d'elle-même le mode de

servato ad puncta duo sumta situ moveri nequire, et adeo cum eo sita esse in directum per definitionem [47]. Sed nulla ratio est, cur puncta illis *A. B.* immota durante eodem motu sumi possint haec sola, et non alia etiam, sive nulla ratio est, cur puncta extensi quod his duobus immotis movetur, servent situm ad haec duo solum immota, et non etiam ad alia, nam situs quem ipsa *A. B.* inter se obtinent, nihil ad rem facit, itaque potuisset sumi aliquod *Y.* loco ipsius *B.* alium obtinens situm ad *A* quam ipsum *B.* obtinet. Verum quaecunque sumi possunt ut immota, ea manente eodem extensis motu sunt immota. Et quia sumtis duobus *A. B.* immotis motus extensi est determinatus, seu determinatum est, quaenam puncta eius moveantur aut non moveantur ; hinc duobus punctis sumtis immotis, determinata sunt alia plura quae servato ad ipsa situ moveri non possunt, seu quae cum ipsis jacent in directum [48].

(52) *Si sit E.A.B. γ F.A.B. et E.B.C. γ F.B.C. erit E.A.C γ F.A.C.* , vid. fig. 25.

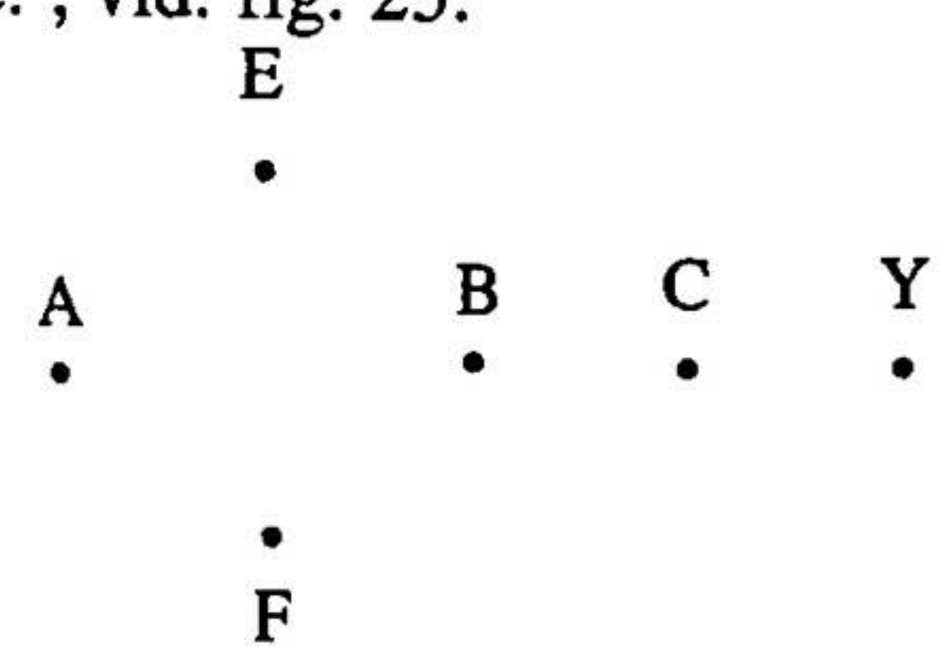


fig. 25

Nam per *E.A.B γ F.B.A* erit *E.A γ F.A* et per *E.B.C γ F.B.C* erit *E.C γ F.C.* Jam si sit *E.A γ F.A* et *E.C γ F.C* erit $E\overset{\frown}{A}C \quad \gamma \quad F\overset{\frown}{A}C$ per prop. 44 (est enim *E.A γ F.A* et *E.C γ F.C* et *A.C γ A.C.*) ergo si sit *E.A.B γ F.A.B.* et *E.B.C γ F.B.C* erit *E.A.C γ F.A.C.* Quod erat dem.

(53) Hinc etiam *erit E.A.B.C γ F.A.C.B posito E.A.B γ F.A.B et E.B.C γ F.B.C.* Nam etiam *E.A.C γ F.A.C* per praeced. ; habe-

47. Barré : « Sed cum corporis illius magnitudo possit esse... » ; « Extensum illud plane sit indefinitum ex datis punctis *A. B.* »

48. Leibniz a barré : « Aliter etiam natura trium punctorum in directum jacentium explicari posse videtur, hoc modo praemissa hac propositione : Si datis tribus punctis sint puncta tria quotcunque *A. B. C.* et sint praeterea puncta duo *E.F* sitque... »

extensum ne peuvent pas se mouvoir en conservant leur situation vis-à-vis de deux points donnés, c'est-à-dire qu'ils sont, par définition, alignés. Mais il n'y a aucune raison pour que les points A, B soient, à l'exclusion de tout autre, les seuls points fixes qu'on puisse choisir durant ce même mouvement ; en d'autres termes il n'y a aucune raison pour que les points d'un extensum en mouvement possédant deux points immobiles ne gardent leur situation qu'à l'égard de ces deux points et non en même temps à l'égard d'autres points, dans la mesure où la situation mutuelle de A et B n'intervient pas. On aurait donc pu choisir, au lieu de B, un Y quelconque, conservant à l'égard de A une situation différente. A l'inverse tous les points immobiles qu'on peut choisir le demeurent tant que l'extensum conserve le même mouvement. Le choix de deux points fixes A, B suffit à déterminer ce mouvement en d'autres termes à indiquer quels sont les points mobiles et les points immobiles ; en choisissant deux points immobiles on en a par conséquent déterminé beaucoup d'autres incapables de se mouvoir sans modifier leur situation par rapport à eux, à savoir tous les points qui leur sont alignés [90].

52 E.A.B γ F.A.B et E.B.C γ F.B.C entraînera E.A.C γ F.A.C (fig. 25).

E.A.B γ F.A.B entraînera en effet E.A γ F.A, et E.B.C γ F.B.C entraînera E.C γ F.C. Or E.A γ F.A et E.C γ F.C entraîneront : $E\overset{\frown}{A}C \quad \gamma \quad F\overset{\frown}{A}C$, d'après la proposition 44 (en effet E.A γ F.A, E.C γ F.C et A.C γ A.C) ; donc E.A.B γ F.A.B et E.B.C γ F.B.C entraîneront E.A.C γ F.A.C. C.Q.F.D.

53 E.A.B γ F.A.B et E.B.C γ F.B.C entraîneront donc également E.A.B.C γ F.A.B.C. Car d'après la démonstration précédente, on aura aussi E.A.C γ F.A.C. Nous avons donc :

génération du fragment III. Le même enchaînement d'idées apparaissait au paragraphe 15 (cf. supra, note 37) et sera repris dans le fragment XVII. L'analogie avec la définition précédente est manifeste dans la mesure où les points en mouvement décrivent des cercles coïncidant avec les trajectoires d'un point Y gardant à l'égard de A et B une situation déterminée.

90. La possibilité du mouvement de génération de la ligne droite, qui sera aussi utilisé pour la génération du cercle, réclame donc une justification. Barré : « Il semble qu'on puisse expliquer autrement la propriété de trois points alignés en ne présupposant que la proposition : si trois points A B C étant donnés puis encore deux points E F tels que... »

mus ergo : $E.A.B\ \gamma\ F.A.B.$ et $E.A.C\ \gamma\ F.A.C.$ et $E.B.C\ \gamma\ F.B.C$ et $A.B.C\ \gamma A.B.C$, id est habemus omnia quae ex hoc :

$E.A.B.C\ \gamma\ F.A.B.C.$ duci possunt ; ergo habemus etiam

$E.A.B.C.\ \gamma\ F.A.B.C.$ (est egregius modus regrediendi, nimirum ex consequentibus omnibus totam naturam antecedentis exhaurientibus ad antecedens).

(54) [49] *Si sit* $E.A\ \gamma F.A$, $E.B\ \gamma F.B$, $E.C\ \gamma F.C$ *erit*

$E.A^\frown B^\frown C \quad \gamma \quad F.A^\frown B^\frown C$ nam quae supersunt combinationes utrinque comparandae $A.B$ et $B.C$ et $A.C$ utrobique coincidunt.

(55) $A.B.X\ \gamma A.B.Y$ seu datis duobus punctis $A.$ $B.$ inveniri possunt duo alia $X.$ $Y.$, ita ut X et Y eodem modo se habeant ad $A.B.$ Vid. fig. 26.

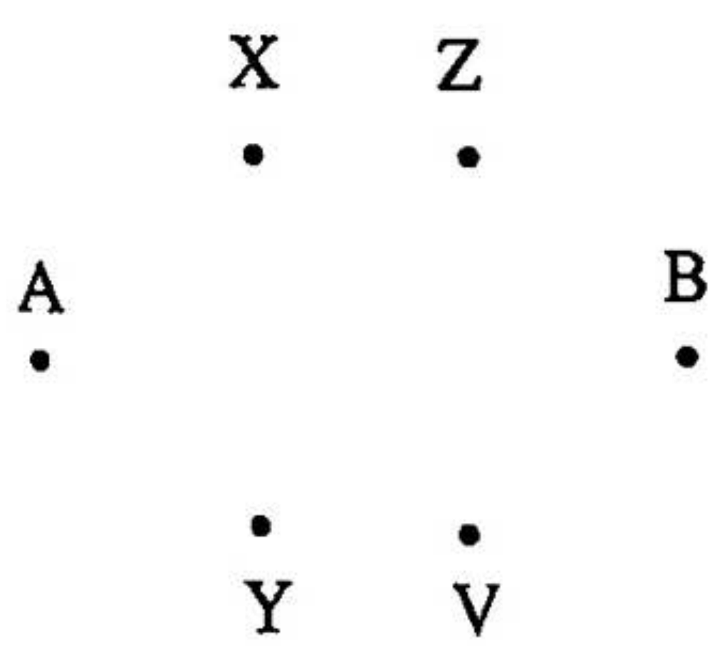


fig. 26

Potest enim reperiri $A.X\ \gamma A.Y$ et $B.Z\ \gamma B.V$ per prop. 43. Ponatur $Z \infty X$ (hoc enim fieri potest per prop. 43, seu Z potest esse data seu jam assumta $X.$ quia $A.B\ \gamma A.V$) itemque ponatur $A.X\ \gamma B.X.$ (nam et in $A.X\ \gamma A.Y$ potest $X.$ esse data quia datur $A.C\ \gamma A.Y$ per prop. 43) erit $V.B.$ $(\gamma\ B.Z\ \gamma\ B.X\ \gamma\ A.X)\ \gamma\ A.Y.$

49. Barré : « (54) : Si puncta duo *E. F.* eodem modo se habeant ad puncta quotcunque ut *A. B. C.* dicentur haec *puncta A. B. C. esse sita in directum*. Vid. fig. 24. Est definitio » ; « (53) : Inveniri possunt puncta quotcunque sita in directum cum duobus punctis datis. Sint enim duo puncta *A. B.* In eadem fig. 24 sumantur alia duo *E* et *F* ita ut sit $E.A.B\ \gamma F.A.B$ ». Entre le § 53 barré et le § 55 du texte définitif Leibniz a barré aussi les paragraphes suivants : « (53) : Nimirum in fig. 24 si sit $E.A.B.C\ \gamma F.A.B.C$ id est $E.A.B\ \gamma\ F.A.B$, $E.A.C\ \gamma\ F.A.C$, $E.B.C\ \gamma\ F.B.C$, $A.B.C\ \gamma A.B.C$, id est porro $E.A\ \gamma F.A$, $E.B\ \gamma F.B$, $E.C\ \gamma F.C$ dicentur puncta *A. B. C.* esse in directum » ; « (55) : $A.B.C\ \gamma A.B.Y$ seu datis tribus punctis *A. B. C.* inveniri potest quartum quod sit ad duo *A.B.* ut tertium *C.* ad ipsa est. Haec propositio semper vera non est ; si scilicet *A. B. C.* sita sint in directum ut postea ostendemus. »

$E.A.B\ \gamma\ F.A.B$, $E.A.C\ \gamma\ F.A.C$, $E.B.C\ \gamma\ F.B.C$ et $A.B.C\ \gamma\ A.B.C$, soit toutes les relations déductibles de $E.A.B.C\ \gamma\ F.A.B.C$; nous aurons donc également $E.A.B.C\ \gamma\ F.A.B.C.$ (C'est un résultat remarquable. L'ensemble des conséquents renferme la totalité de l'antécédent, on peut donc, en partant d'eux, remonter à ce dernier) [91].

54 [92] $E.A\ \gamma\ F.A$, $E.B\ \gamma\ F.B$, $E.C\ \gamma\ F.C$ entraînera :

$E.A^\frown B^\frown C \quad \gamma \quad F.A^\frown B^\frown C$, car les combinaisons A.B, B.C, A.C, qui restent à comparer coïncident dans chaque membre.

55 $A.B.X\ \gamma\ A.B.Y$ c'est-à-dire étant donnés deux points A, B, on peut en trouver deux autres X, Y ayant le même rapport à l'égard de A.B (fig. 26) [93].

On peut en effet, d'après la proposition 43, trouver $A.X\ \gamma\ A.Y$ et $B.Z\ \gamma\ B.V$. Posons $Z \infty X$ (la proposition 43 montre qu'on peut le faire, en d'autres termes Z peut au départ être choisi identique à X puisque $A.B\ \gamma\ A.V$), posons également $A.X\ \gamma\ B.X$ (dans $A.X\ \gamma\ A.Y$, X peut aussi être une donnée puisque d'après la proposition 43 on a $A.C\ \gamma\ A.Y$), on aura $V.B$ $(\gamma\ B.Z\ \gamma\ B.X\ \gamma\ A.X)\ \gamma\ A.Y$. D'où

91. Cette règle logique est valable pour toutes les formules de la Caractéristique : chacune d'elles est équivalente à l'ensemble de toutes les formules qui en dérivent directement.

92. Barré : « 54 : Si deux points E, F sont dans un même rapport avec trois points A, B, C, on dira que ces points A, B, C sont alignés. Voir fig. 24. Ceci constitue une définition » ; « 53 : On peut trouver un nombre quelconque de points alignés avec deux points donnés. Soient en effet deux points A, B. sur la même figure 24, considérons deux autres points E et F tels que $E.A.B\ \gamma\ F.A.B.$ » Leibniz a également barré les paragraphes suivants : « 53 : Si sur la figure 24 $E.A.B.C.\ \gamma\ F.A.B.C.$, c'est-à-dire si $E.A.B\ \gamma\ F.A.B$, $E.A.C\ \gamma\ F.A.C$, $E.B.C\ \gamma\ F.B.C$, $A.B.C\ \gamma\ A.B.C$, c'est-à-dire de surcroît, $E.A.\ \gamma\ F.A.$, $E.B\ \gamma\ F.B$, $E.C.\ \gamma\ F.C$, on dira que les points A, B, C sont alignés. » ; « 55 : $E.A.B\ \gamma\ F.A.B$, en d'autres termes, trois points A, B, C étant donnés, on peut en trouver un quatrième qui soit avec les deux points A.B. dans le même rapport que le troisième C. Cette proposition n'est pas toujours vraie ; à savoir lorsque A, B, C sont alignés comme le montrerai plus bas. »

93. La formule $A.B.X\ \gamma\ A.B.Y$ doit donc être interprétée comme renfermant une double quantification universelle et une double quantification existentielle. L'identité de situation par rapport à la « relation » A.B met en œuvre une nouvelle symétrie (par rapport à la médiatrice de AB) s'ajoutant à celle qu'entraîne l'identité de situation à l'égard de A et de B (symétrie par rapport à la droite AB). Cela est de nature à éclairer les développements difficiles du fragment VIII relatifs au prédicat *unique à l'égard de* (cf. supra, VIII, note 21).

Ergo [50] $V.B.X\ \gamma\ Y.A.X\ \gamma\ X.B.V$, in quo omnia hactenus determinata continentur. Ergo potest poni $V \infty Y$, nihil enim in hactenus determinatis obstat. Fiet $Y.B.X\ \gamma\ Y.A.X$. Ergo $Y.B\ \gamma\ Y.A$, $B.X\ \gamma\ A.X$. Rursus $Y.B.X\ \gamma\ X.B.Y$. Ergo $Y.B\ \gamma\ X.B$. Ergo fit $Y.B.\ \gamma\ X.B\ \gamma\ Y.A\ \gamma\ A.X$. Ergo $A.B.X\ \gamma\ A.B.Y$.

(56) [51] Si tria puncta *E. F.* γ sumta distributive eodem modo se habeant ad tria puncta *A. B. C.* sumta collective, erunt tria priora in eodem arcu circuli, tria posteriora in eadem recta seu jacebunt in directum. Hanc propositionem annotare placuit, ratio patebit ex sequentibus.

(57) Si sit $E.A.B.C\ \gamma\ F.A.B.C\ \gamma\ G.A.B.C.$ et sit *E non* ∞F, *E non* $\infty\gamma$, *F non* $\infty\gamma$, dicentur *puncta quodcunque A. B. C. sita esse in directum*, seu esse in eadem recta.

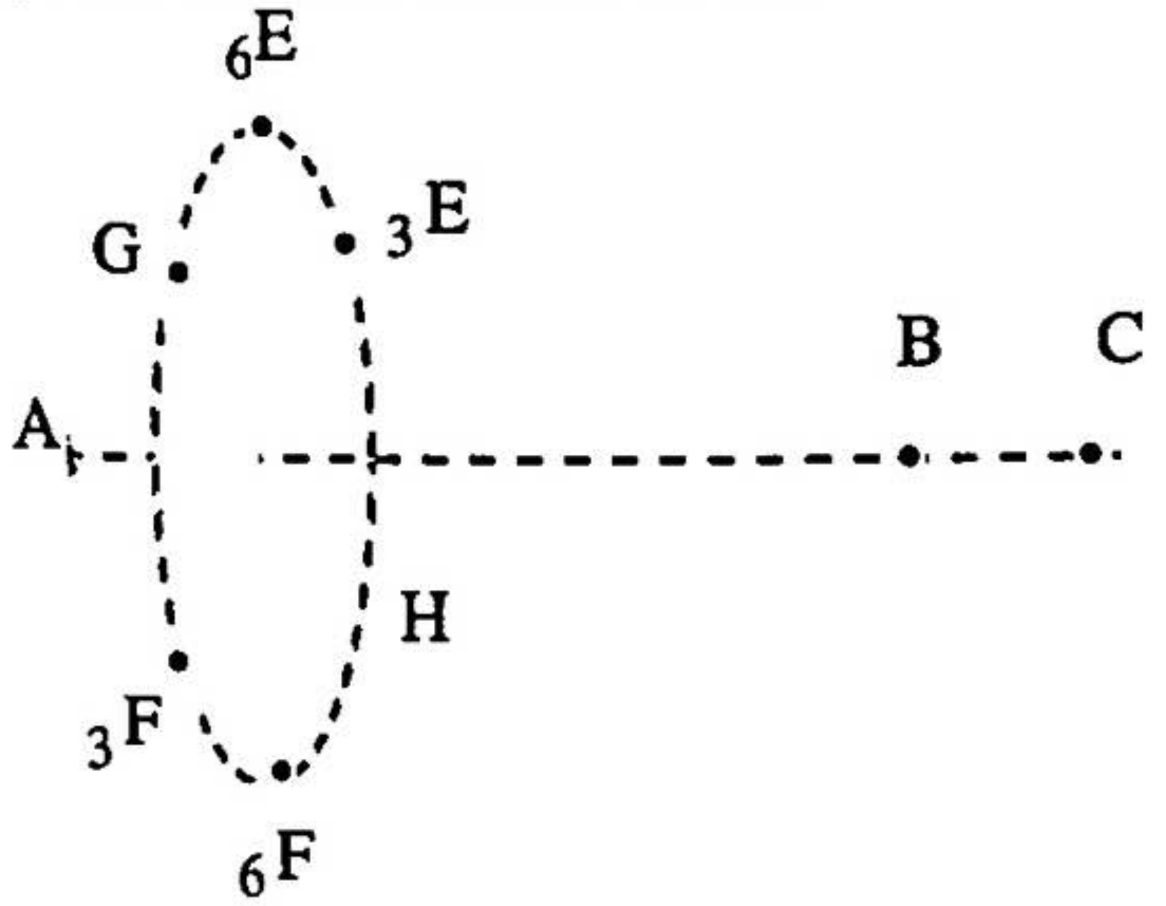


fig. 27

(58) [52] Omisso licet puncto *C*. Si sit $E.A.B\ \gamma\ F.A.B\ \gamma\ G.A.B.$ erunt puncta *E. F. G.* in *eodem plano*.

(59) Iisdem positis erunt puncta *E. F. G.* in eodem *arcu circuli.*

(60) Inter duo quaevis congrua assumi possunt infinita alia congrua, nam unum in locum alterius servata forma sua transire non posset nisi per congrua.

---

50. Barré : « $V.B.X\ \gamma Y.A.X$ Ergo potest sumendo $V \infty Y$ fiet $A.B.X\ \gamma\ A.B.Y.$ »

51. Barré : « Datis duobus punctis inveniri possunt alia quotcunque cum ipsis in directum jacentia. Inspice fig. 24. Sint duo puncta *A. B.* Inveniantur (per prop. 55) alia duo *E. F.* ita ut sit $E.A.B\ \gamma\ F.A.B.$ Denique per prop. 43 inveniatur punctum *Y* tale ut sit $Y.E\ \gamma Y.F$ … »

52. Barré : « (58) : Iisdem positis erunt puncta E. F. G. in eodem plano. (59) : Iisdem positis erunt puncta E. F. G. in arcu circuli. »

V.B.X γ Y.A.X γ X.B.V, proposition contenant tous les termes déjà déterminés. On peut donc poser V ∞ Y, rien dans les termes déjà déterminés ne s'y oppose, il viendra Y.B.X γ Y.A.X donc Y.B γ Y.A, B.X γ A.X, ainsi que Y.B.X γ X.B.Y d'où Y.B γ X.B. Il vient donc Y.B γ X.B γ Y.A γ A.X, et par suite A.B.X γ A.B.Y.

56 [94] Si trois points E, F, G considérés individuellement se trouvent dans le même rapport à l'égard de l'ensemble des trois points A, B, C, les trois premiers se situeront sur un même arc de cercle, les trois derniers sur une même droite et seront alignés. J'ai tenu à mentionner cette proposition dont la raison apparaîtra dans ce qui suit [95].

57 Si E.A.B.C γ F.A.B.C γ G.A.B.C et E non ∞ F, E non ∞ G, F non ∞ G, on dira que tous les points A, B, C sont alignés, c'est-à-dire se trouvent sur la même droite.

58 [96] En supprimant le point C, si E.A.B γ F.A.B γ G.A.B, les trois points E F G seront *dans un même plan* [97].

59 Sous les mêmes hypothèses les trois points E, F, G seront *sur un même arc de cercle.*

60 Entre deux termes congrus quelconques on peut en faire apparaître une infinité d'autres, le premier ne pouvant se substituer au second en conservant sa figure propre sans passer par des termes congrus.

---

94. Barré : « Deux points étant donnés on peut en trouver un nombre quelconque d'autres alignés avec eux. Observez la figure 24. Soient les deux points A, B. Trouvons-en (d'après la proposition 55) deux autres E, F tels que E.A.B γ F.A.B. Enfin, d'après la proposition 43, trouvons un point Y tel que Y.E γ Y.F… »

95. Situation déjà apparue dans le fragment VIII, cf. supra, VIII, note 22 et infra, § 74. Trois points différents ne peuvent se trouver dans un même rapport à l'égard de trois points que si ces derniers sont alignés. Il n'y a en effet que deux points de l'espace ayant une même situation à l'égard de trois points non alignés (symétriques par rapport au plan qu'ils définissent). Dès lors les points se trouvant dans une même situation à l'égard d'une droite sont ceux d'un cercle dans le plan perpendiculaire. Leibniz apporte ici un complément aux raisonnements ébauchés dans le fragment VIII.

96. Barré : « Sous les mêmes hypothèses les trois points E, F, G seront dans un même plan. 59 : sous les mêmes hypothèses les points E, F, G seront sur un arc de cercle. »

97. Perpendiculaire au segment AB.

(61) Hinc a quolibet puncto ad quolibet punctum duci potest linea. Nam punctum puncto congruum est.

(62) Hinc et a quolibet puncto per quolibet punctum duci potest linea.

(63) Linea duci potest quae transeat per puncta quotcunque data.

(64) Eodem modo ostendetur, per lineas quotcunque datas transire posse superficiem. Nam si congruae sunt, patet lineam generantem successive in omnibus esse posse. Si congruae non sunt, patet lineam generantem, durante motu, ita augeri, minui et transformari posse, ut dum illuc venit, congrua fiat.

(65) Unumquodque in spatio positum potest, servata forma sua, seu cuilibet in spatio existenti infinita alia congrua assignari possunt.

(66) Unumquodque servata forma sua moveri potest in infinitis modis.

(67) Unumquodque ita moveri potest servata forma sua, ut incidat in punctum datum.

Generalius : unumquodque servata forma sua ita moveri potest, ut incidat in aliud cui congruum in ipso designari potest. Nam congruum unum transferri potest in locum alterius, nec quicquam prohibet id, in quo congruum illud est quod transferri debet, simul cum ipso transferri, quia ratio separationis nulla est : et quod uni congruorum aptari potest, poterit et alteri congruorum similiter aptari.

(68) *A* γ *B*, id est assumto puncto quodlibet aliud conguum est.

61 Ceci entraîne la possibilité de mener une ligne d'un point quelconque à un autre point quelconque, un point étant en effet congru à tout autre [98].

62 D'où également la possibilité de mener d'un point quelconque une ligne passant par un autre point quelconque.

63 On peut mener une ligne passant par tous les points donnés qu'on veut [99].

64 On montrera de la même manière l'existence d'une surface passant par autant de lignes données qu'on veut. Si ces lignes sont congrues, il est clair qu'une ligne génératrice peut coïncider de proche en proche avec elles ; si elles ne le sont pas, il est évident qu'au cours de son mouvement on peut l'augmenter, la diminuer et la transformer pour qu'elle soit congrue à l'une d'elles, au moment où elle y parvient [100].

65 Chaque chose peut être disposée dans l'espace en conservant sa figure propre [101], en d'autres termes à tout objet situé dans l'espace on peut faire correspondre une infinité d'autres objets qui lui soient congrus.

66 Tout objet peut être déplacé d'une infinité de façons en conservant sa figure propre [102].

67 Tout objet déplacé en conservant sa figure propre peut l'être de façon à passer par un point donné.

Plus généralement tout objet peut être déplacé en conservant sa figure propre de façon à en rencontrer un autre congru. Car deux objets étant congrus, l'un peut prendre la place de l'autre, et rien n'empêche de déplacer en même temps qu'un objet le lieu qu'il occupe, puisqu'il n'y a aucune raison de les dissocier, or ce qu'on peut faire correspondre à l'un de deux objets congrus, on pourra de façon similaire le faire correspondre à l'autre.

68 A γ B en d'autres termes tout point est congru à un point donné.

98. Démonstration du premier postulat d'Euclide. On peut considérer les §§ 61-67 comme les *principes de connexion* de la *Geometria Situs* leibnizienne.

99. Possibilité dont le paragraphe 6 du *Discours de Métaphysique* déduira la possibilité de trouver un ordre entre des points aléatoires.

100. Leibniz admet donc la possibilité de définir toutes les surfaces au moyen d'une ligne génératrice.

101. On peut voir dans cette phrase un principe d'indépendance entre un situs interne et un situs externe.

102. Il s'agit ici, comme dans les paragraphes 67, 70, 71, de démontrer la possibilité des « déplacements » (rotations et translations). Cette possibilité est posée ici comme une conséquence des propriétés de la congruence dans l'espace.

(69) *A.B γ B.A* ut supra.

(70) *A.B γ X.Y.* Eodem modo.

A.B.C γ X.Y.Z et *A.B.C.D γ X.Y.Z.Ω* et ita porro. Hoc enim nihil aliud est, quam quotcunque puncta posse moveri servato situ inter se. Situm autem eorum inter se servari intelligi potest, si ponatur esse extrema lineae cuiusdam rigidae qualiscunque.

(71) *A.B γ C.X* , *A.B.C γ D.X.Y.* , etc.

Hoc enim nihil aliud est quam quotcunque puncta, ut *A. B. C.*, posse moveri servato situ inter se, ita ut unum ex ipsis *A* incidat in punctum aliquod datum *D.* reliquis duobus *B. C.* in alia quaecunque *X. Y.* incidentibus.

(72) Si *A.B.C non γ A.B.Y* nisi *C ∞ Y* tunc puncta *A. B. C.* dicentur *sita in directum* (vid. fig. 24) seu *C. erit situm in directum cum ipsis A. B.* si [53] unicum sit quod eum situm ad *A.B.* habeat. An autem talis punctorum situs reperiatur, postea inquirendum erit. Linea autem cuius omnia puncta sita sunt in directum, dicetur *recta*. Sit enim *A.B.zY γ A.B.zX* atque ideo *zY ∞ zX* , erit $\overline{\text{z}}$Y (∞ $\overline{\text{z}}$X)*Linea recta* ; id est si punctum *Y* ita moveatur, ut situm semper ad puncta *A. B.* servet, qui ipsi uni competere possit, sive determinatum, minimeque varium ac vagum, describi ab eo lineam rectam.

(73) [54] Si *A.B.C γ A.B.D* erit *γ A.B.zY* , vid. fig. 29, nam erit *C ∞ 3Y.*, et *D ∞ 6Y*, [55] nempe *C* et *D* erunt loca ipsius *Y* moti ita ut servet situm eundem ad *A.B.* inter quae alia necessario erunt

53. Barré : « *C* cum relationem situm eundem ad *A.B.* habentium unicum est. »

54. Barré : « (73) : *A.B.X γ A.B.Y.* Nam sit *A.X γ A.Y* et *B.X γ B.V* per 71 (nam *A.B γ C.Y* dicta prop. 71 pro puncto *B* dato, ponatur punctum *X.* aliquod ; et ponatur *C* datum ∞*A.*, fiet *A.X γ A.Y* , eodem modo fiet *B.X γ B.V* ostendendum fieri posse *V ∞ Y*). Ponatur *A.X γ B.X.* (quia *X.* arbitrarium est) itemque fiet *B.V γ A.Y* (nam *A.Y γ A.X γ B.X γ B.V*) itaque *V.B.X γ Y.A.X γ X.B.V* per 44. In quibus continentur omnia quae assumsimus, quibus non repugnat sumi *V ∞ Y* , quo posito fiet : *Y.B.X γ Y.A.X γ X.B.Y.* unde fiet : *A.Y γ B.Y γ A.X γ B.X* ac proinde per 44. fiet : *A.B.X γ A.B.Y.* ». Leibniz a barré aussi ces deux débuts : « (73) : Si *A.B.*$_3$*C γ A.B.*$_6$*C* erit *A.B.C γ A.B.Y.* » ; « (73) : Si *A.B.*$_3$*C γ A.B.*$_6$*C* erit *γ A.B.*$_z$*C.* »

55. Barré : « non potest autem *Y*, moveri ex 3 in 6 nisi per alia indefinita quae vocabimus $_z$*Y.* »

69 A.B γ B.A, comme précédemment [103].

70 A.B γ X.Y, de la même façon A.B.C γ X.Y.Z, A.B.C.D γ X.Y.Z.Ω et ainsi de suite. Cela signifie seulement que des points en nombre quelconque peuvent être déplacés en conservant leur situation mutuelle ; pour concevoir que leur situation mutuelle reste inchangée on peut supposer qu'ils sont les extrémités d'une ligne rigide de nature indifférente [104].

71 A.B γ C.X, A.B.C γ D.X.Y etc. Cela signifie que des points A, B, C, aussi nombreux soient-ils, peuvent, tout en gardant leur situation mutuelle, se déplacer en sorte que l'un d'eux, A atteigne un point donné D, les deux autres B, C d'autres points X, Y quelconques.

72 Si A.B.C nonγ A.B.Y sauf si C ∞ Y on dira que les points A.B.C sont alignés (fig. 24) ou que C est aligné avec A.B, dans la mesure [105] où il est le seul ayant à l'égard de A.B la situation qui est la sienne. La question de savoir si des points peuvent avoir cette disposition devra être examinée plus tard [106]. La ligne dont tous les points sont alignés sera nommée *droite*. Supposons en effet que A.B.zY γ A.B.zX entraîne zY ∞ zX, $\overline{\text{z}}$Y (∞ $\overline{\text{z}}$X) sera une *droite*, ce qui signifie que si un point Y se déplace de façon à garder toujours à l'égard des points A, B une situation qu'on ne peut accorder qu'à lui, en d'autres termes s'il est déterminé de façon univoque et non ambiguë, il décrit une ligne droite.

73 Si A.B.C γ A.B.D on aura γ A.B.zY (fig. 29)

On aura en effet C ∞ 3Y et D ∞ 6Y [107], ce qui signifie que C et D seront les positions de Y dans un mouvement où Y conserve la même situation à l'égard de A.B, mais il y aura nécessairement entre elles une

103. Cf. supra, § 42.

104. Artefact pédagogique qui conduira Leibniz, dans sa lettre à Huygens, à identifier le situs à un extensum (cf. infra, X).

105. Barré : « Puisque la relation des points C ayant la même situation à l'égard de A.B. est unique. »

106. Cette question a déjà été examinée au fragment V (cf. supra, V, note 12). La remarque signifie que Leibniz n'admet pas encore ici que la définition de la droite par détermination de ses points constitue une définition réelle.

107. Barré : « or Y ne peut être déplacé de 3 en 6 qu'en passant par d'autres points indéterminés que nous noterons zY. »

indefinita nempe designanda per zY. Linea autem $\overline{z}Y$ vocetur

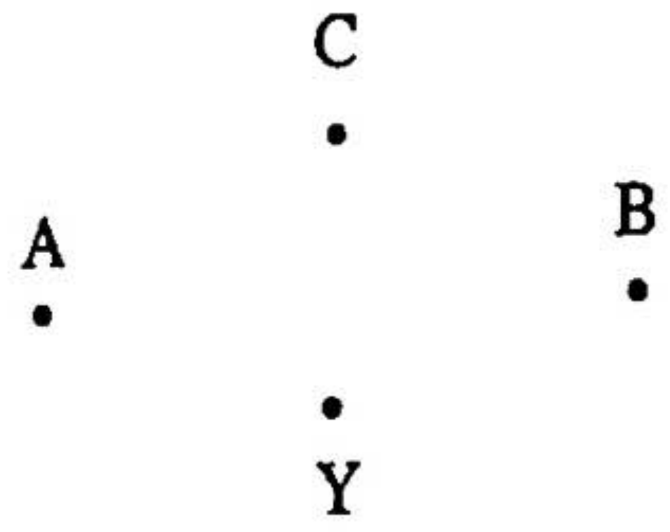


fig. 28

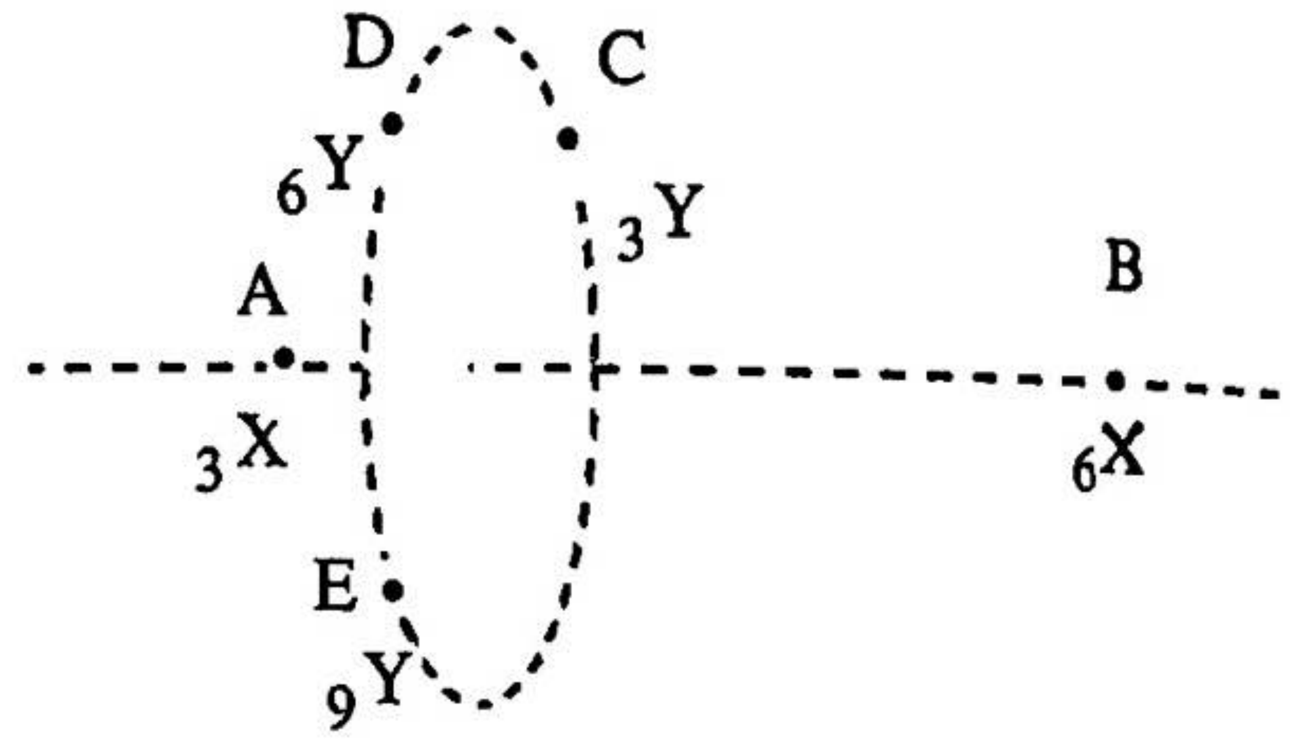


fig. 29

Circularis. Notandum autem hanc Lineae circularis descriptionem ea priorem esse quam dedit Euclides ; Euclides enim indiget recta et plano. A nostra procedit qualiscunque assumatur rigida linea, modo in ea duo sumantur puncta, quibus immotis ipsa linea vel saltem aliquod eius punctum moveatur ; hoc enim punctum ad puncta duo assumta eundem servabit situm, cum omnia sunt in linea rigida. Id ergo punctum describet lineam circularem per hanc definitionem nostram. Si quis vero neget, in linea rigida tale punctum inveniri posse, quod datis duobus immotis moveatur, necesse erit per definitionem praecedentem (prop. 72) omnia lineae rigidae puncta in directum esse sita, sive necesse erit dari lineam rectam. Alterutrum ergo hoc modo admittere necesse est, lineam rectam possibilem esse, vel circularem. Alterutra autem admissa, alteram postea inde ducemus. Hic obiter notandum, quia, ut suo loco patebit, per tria quaelibet data puncta transire potest arcus circularis, hinc tribus datis punctis inveniri unum posse, quod ad tria illa eodem se habeat modo, nempe $X.C \gamma X.D \gamma X.E.$, idque saepius fieri posse seu diversa reperiri posse X. pro iisdem $C.\ D.\ E.$, omniaque X in unam rectam cadere quae transeat per circuli centrum, sitque ad planum eius ad angulos rectos.

(74) [56] Sit linea quaelibet $\overline{z}Y$, vid. fig. 29, in ea poterunt sumi quotcunque puncta $3Y.\ 6Y\ \ 9Y.\ 12Y.$&c. ita ut sit $3Y.6Y \gamma 6Y.9Y \gamma 9Y.12Y$&c. Nam generaliter, si qua sit linea

56. Barré : « (74) : Ostendendum jam est iisdem positis plura puncta haberi posse praeter A et B. quae ad ${}_zY$ (sive ad quaelibet Y.) eodem se habeant modo. Sumantur in ipsa ${}_zY$. puncta quotlibet, ${}_3Y$. et ${}_6Y$. et ${}_9Y$. et ${}_{12}Y$, etc., ita ut sit ${}_3Y.{}_6Y \gamma {}_6Y.{}_9Y \gamma {}_9Y.{}_{12}Y.$, etc. »

infinité de points que nous devons noter zY [108]. La ligne $\overline{z}Y$ sera nommée *circulaire* [109] ; remarquons que cette construction du cercle est antérieure à celle qu'a donnée Euclide, laquelle requiert la droite et le plan [110]. La nôtre suppose au contraire seulement une quelconque ligne rigide sur laquelle on ait choisi deux points demeurant immobiles pendant qu'on la déplace ou, du moins, qu'on déplace un de ses points. Ce dernier conservera en effet une même situation à l'égard des deux points choisis puisque tous se situent sur une seule ligne rigide ; ce point, d'après notre définition, décrira une courbe circulaire. Nier qu'une ligne rigide puisse contenir un tel point capable de se mouvoir alors que deux autres points sont fixes, cela signifiera nécessairement, d'après la définition précédente (prop. 72), que tous les points de la ligne rigide sont disposés en ligne droite, c'est-à-dire l'existence de la droite [111]. Ce raisonnement conduit donc à une alternative, à savoir la possibilité de la ligne droite ou de la ligne circulaire. Mais l'une étant admise, nous en déduirons également l'autre. Remarquons au passage une chose que la suite éclaircira : par trois points donnés quelconques, on peut faire passer un arc de cercle, par conséquent trois points étant donnés on peut en trouver un dans un même rapport à leur égard et tel que $X.C \gamma X.D \gamma X.E$; or pour les mêmes points C, D, E, on peut réitérer ceci et trouver différents points X ; tous ces X se situent sur une droite unique passant par le centre du cercle et coupant son plan à angle droit [112].

74 [113] Sur une Ligne $\overline{z}Y$ quelconque (fig. 29) on pourra choisir un nombre arbitraire de points 3Y, 6Y, 9Y, 12Y, tels que :
$3Y6Y \gamma 6Y9Y \gamma 9Y12Y$ etc. De manière générale en effet, en

108. Il semble clair ici que la variable z ne désigne plus seulement les entiers.

109. Cette définition coïncide avec la génération du cercle énoncée au début du fragment III.

110. Livre I, définition 15 : « Un cercle est une figure plane comprise à l'intérieur d'une ligne appelée circonférence et est telle que toutes les droites issues d'une point intérieur (unique) vers la circonférence sont égales entre elles. » Leibniz continue de souligner chacune des réussites de la nouvelle Caractéristique par rapport aux *Eléments*. Le cercle est défini sans présupposer la notion de rayon droit et contenu dans un plan. Les lignes rigides que Leibniz utilise en 1679 pour définir les notions de *situs*, de congruence, etc. permettent la construction d'une Géométrie plus générale et plus rigoureuse que celle d'Euclide. Le dépassement d'Euclide constitue donc l'un des objectifs de la Caractéristique Géométrique en 1679.

111. Cette réduction des lignes rigides aux droites sera améliorée dans les fragments X et XII, où Leibniz considère aussi la possibilité de lignes rigides de forme quelconque.

112. Situation correspondant à celle du paragraphe 56.

113. Barré : « 74 : Il faut d'abord montrer que sous les mêmes hypothèses on peut, en plus de A et B, obtenir d'autres points ayant avec zY (ou avec un Y

parva, cuius unum extremo sit in alia linea, poterit prior ita moveri, extremo ejus duabus lineis communi immoto, ut altero quoque extremo posteriori lineae occurrat, itaque hoc motu partem unam abscindet, jamque novo puncto invento immoto manente rursus aliam, et ita porro. Sed jam observo, ne id quidem necesse esse, et sufficere [57] unam lineam eidem lineae suis extremis applicari saepius quomodocunque, ita ut plures ejusdem lineae partes assignentur quarum extrema aliorum extremis sint congrua, ut in fig. 30

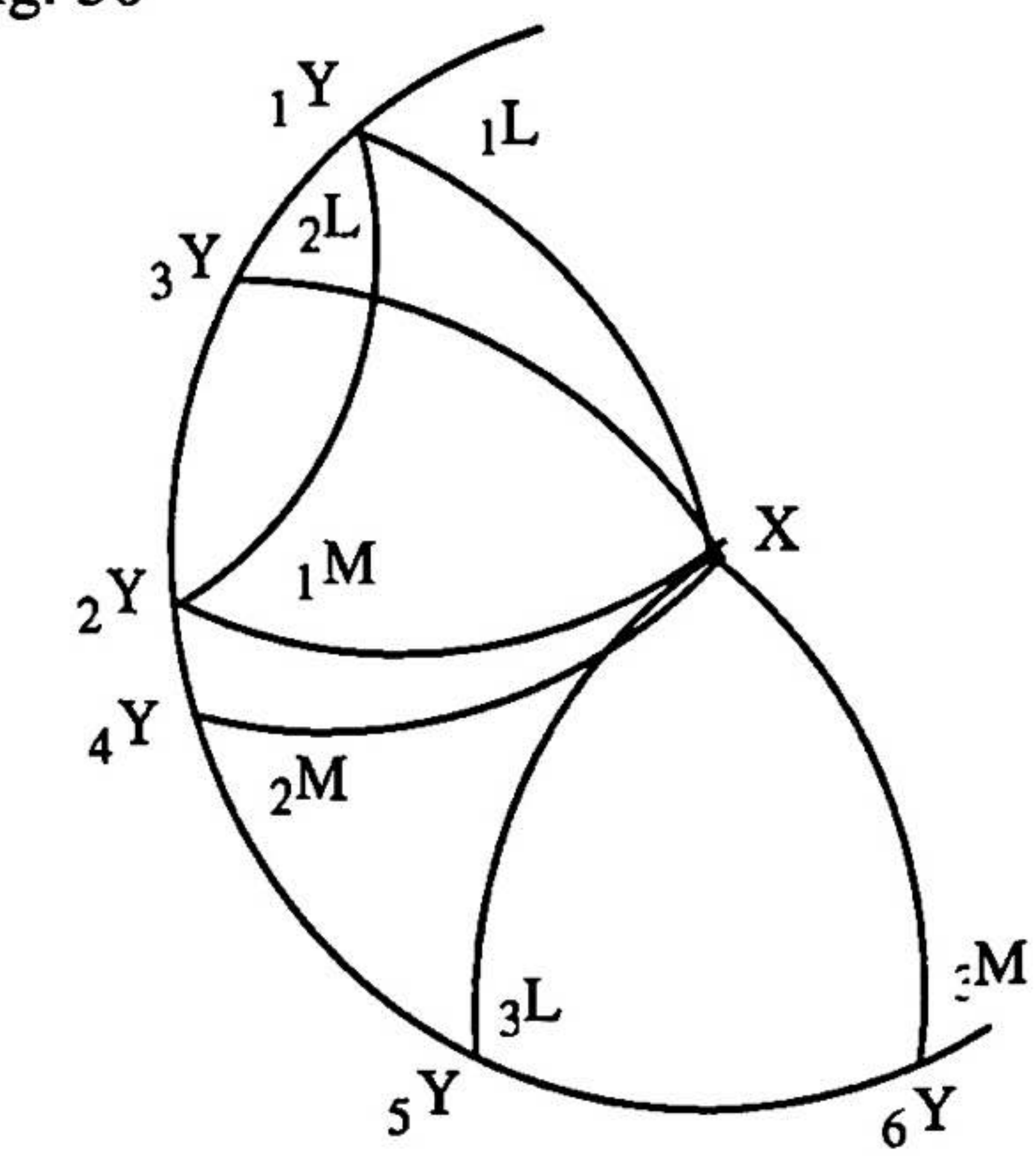


fig. 30

linea rigida *LM* suis extremis *L.* et *M.* ipsi lineae *zY* aliquoties in *1Y.2Y.* et *3Y.4Y.* et *5Y.6Y.* quae coincident ipsis *1L.1M* et *2L.2M* et *3L.3M*. Nam si semel *L.M* ipsi $\overline{z}$Y applicari possit, infinitis modis applicari potest, si posteriores applicationes quantumvis parum distent. Jam tam [58] ex *L* et *M* educantur duae lineae congruae eodem modo se habentes, ea quae ex *L* educitur ad *L*, quo illa quae ex *M* educitur ad *M*, quae sibi occurrunt in *X.*, sitque *1L.X.1M* γ *2L.X.2M*, et ita porro, id est quae ex *1L* et *1M* educuntur, eousque producantur ut non ante sibi occurrant quam ubi ex *2Y. 2M.* eodem modo eductae sibi occurrunt. Unde patet, punctum [59] *X.* eodem modo se habere ad omnia *Y.* assignata, et si

57. Barré : « in una linea diversas assumi partes, quarum ex... »
58. Le terme « tam » n'apparaît pas dans l'édition Gerhardt.
59. Dans l'édition Gerhardt on lit « puncta » au lieu de « punctum ».

prenant une ligne suffisamment petite dont une extrémité se situe sur une autre ligne, on pourra la déplacer de sorte que leur extrémité commune reste immobile et que l'autre rencontre à son tour la seconde ligne ; ce déplacement en supprime donc une partie. En prenant alors un autre point immobile, on en supprime une autre partie, et ainsi de suite. Notons qu'il n'est même pas nécessaire de procéder ainsi : il suffit de faire coïncider plusieurs fois et de différentes façons les extrémités d'une ligne avec une autre pour faire apparaître sur cette dernière différentes parties dont les extrémités sont congrues à celles d'autres lignes.

Sur la fig. 30 par exemple, la ligne rigide LM coïncide plusieurs fois avec $\overline{z}$Y par ses extrémités L et M, en 1Y2Y, 3Y4Y, 5Y6Y, lesquels coïncident eux-mêmes avec 1L1M, 2L2M, 3L3M. Il suffit de pouvoir appliquer une seule fois LM sur $\overline{z}$Y, pour pouvoir le faire d'une infinité de façons, pourvu que les nouvelles applications diffèrent très peu des précédentes. En partant de L et M on mène deux lignes congrues, celle issue de L se trouvant avec L dans le même rapport que celle issue de M avec M ; ces deux lignes se coupent en X, de sorte que 1L.X.1M γ 2L.X.2M, et ainsi de suite. Cela signifie qu'on prolonge les lignes issues de 1L et 1M assez loin pour qu'elles ne se coupent pas avant le point d'intersection des lignes issues de la même manière de 2L2M. Il en résulte que le point X se comporte de la même façon avec

quelconque) le même rapport. Prenons sur zY un nombre quelconque de points 3Y, 6Y, 9Y, 12Y etc. de sorte que 3Y.6Y γ 9Y.12Y etc. »

quidem linea talis est, ut eiusmodi punctum habeat, quod ad omnia eius puncta eodem sit modo, id hoc modo inveniri. Si autem circularis sit linea, ut hoc loco, sufficit punctum aliquod ad tria lineae circularis puncta se eodem modo habens inveniri, id enim eodem modo se habebit ad alia omnia. Cuius rei ratio est, quia ex tribus punctis datis *C. D. E.*, vid. fig. 29, posito esse *C.D. γ D.E.*, methodo paulo ante dicta ad fig. 30, punctum aliquod certum determinari, ac proinde aliis tribus punctis quibuslibet in circulo assumtis prioribus tribus congruentibus, eodem modo lineas concurrentes congruas ducendo, necesse esse deveniri semper ad idem *X*. Hinc cum ex tribus datis punctis *D. C. E.* modo diverso inveniri possunt puncta *X.*, prout lineae congruentes aliter atque aliter ducuntur, seu citius tardiusque convergunt, patet etiam alia utique inveniri posse puncta *X.*, eaque omnia in unam lineam cadere.

(75) Sed eadem sine circulo simplicius consequi possumus.

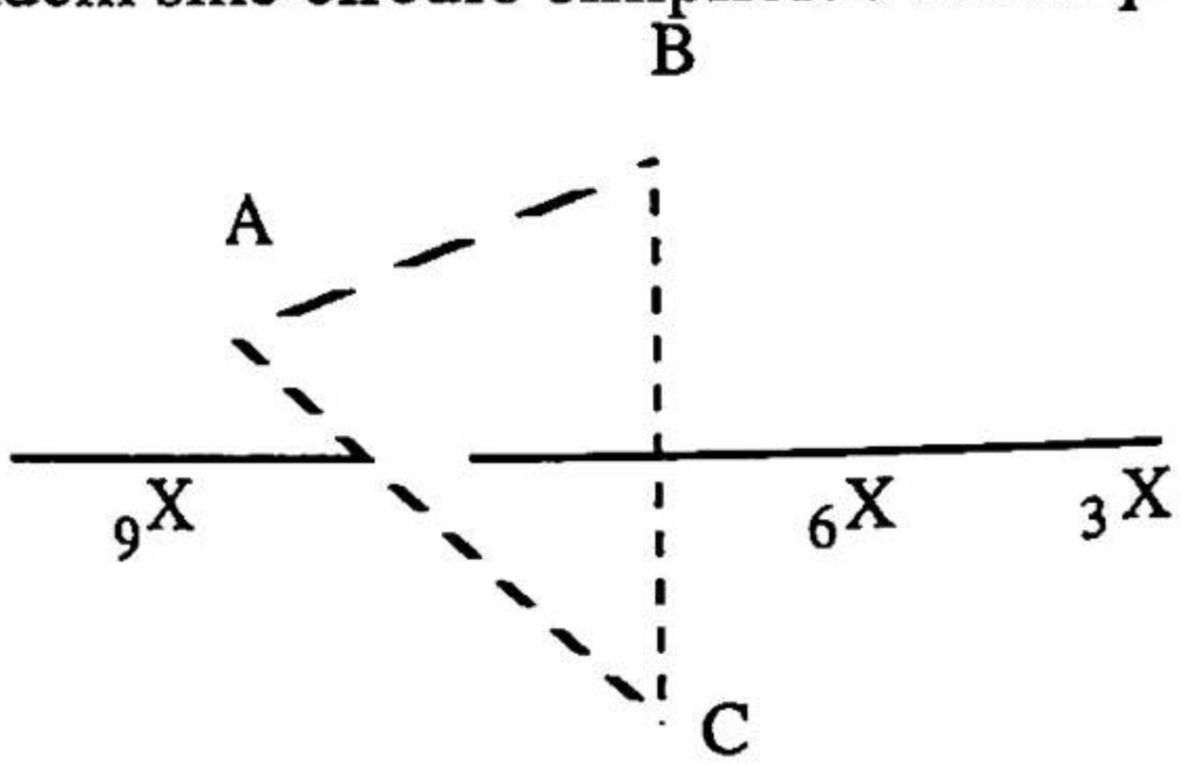


fig. 31

Sint tria puncta *A. B. C.*, ita ut sit *A.B.γ B.C.γ A.C.*, invenianturque puncta *X.* ita ut sit *A.X.γ B.X.γ C.X.* idque quoties libet, sive quod idem est, moveatur punctum *X.* ita ut quivis eius locus, ut *zX*, eodem modo se habeat ad *A.B.C.*, id est ut sit *A.3X. γ B.3X. γ C.3X.*, tunc puncta *zX* erunt in directum posita, sive *zX* erit *linea recta*. Atque ita apparet quid velit Euclides, cum ait, Lineam rectam ex aequo sua interjacere puncta, id est non subsultare in ullam partem, seu non aliter ad punctum *A* quam *B* vel *C* durante motu se habere. Hinc autem modus quoque habetur puncta *X.* rectae $\overline{z}$X inveniendi. Nimirum si ex *A.* linea educatur quaecunque [60] eodem modo se habens ad *B* et *C*, itemque alia per

60. Barré : « in se rediens… ».

tous les Y choisis, et, s'il existe une ligne comportant un point qui soit dans le même rapport avec tous les autres, ce procédé permet de le trouver [114]. La ligne est-elle circulaire comme ici, il suffit de trouver un point dans le même rapport avec trois de ses points pour l'être avec tous les autres. La raison en est qu'à partir des trois points C, D, E donnés tels que C.D γ D.E (fig. 29), la méthode que je viens d'exposer sur la fig. 30 détermine un point et par conséquent si on choisit sur le cercle trois autres points congrus et qu'on trace de la même manière des lignes concourantes congrues, on aboutit toujours nécessairement au même X. Dès lors, puisqu'à partir de trois points donnés D, C, E, il y a différentes façons de trouver des points X, selon qu'on trace les lignes congrues de telle ou telle manière ou convergeant plus ou moins vite, il est clair qu'on peut toujours en trouver d'autres et qu'ils tombent tous sur une seule droite [115].

75 Mais nous pouvons aboutir plus simplement aux mêmes conclusions sans utiliser de cercle.

Soient trois points A, B, C (fig. 31) tels que A.B γ B.C γ A.C [116], supposons qu'on ait trouvé, autant de fois qu'on l'a voulu, des points X tels que A.X γ B.X γ C.X ; en d'autres termes déplaçons le point X de façon à ce que n'importe laquelle de ses positions zX se trouve dans le même rapport avec A, B, C, c'est-à-dire de façon que A3X γ B3X γ C3X ; les points zX seront dans ces conditions alignés et $\overline{z}$X sera une *ligne droite*. On voit ainsi ce que veut dire Euclide lorsqu'il déclare que la ligne droite repose également entre ses propres points [117], c'est-à-dire qu'elle n'a aucune partie saillante, ou encore qu'elle se comporte de la même manière à l'égard de A de B ou de C lorsqu'elle est en mouvement. Mais ceci donne également un moyen de trouver les points X de la droite $\overline{z}$X : si partant de A on trace une ligne quelconque se tenant dans le même rapport avec B et avec C, puis une

114. En faisant varier l'écartement des lignes issues de L et M. La formulation pourrait prêter à confusion. Le point X ne peut pas être un point de la ligne Y elle-même. Dans le plan, la ligne Y ne peut être qu'un cercle dont X est le centre ; mais la propriété pourrait s'appliquer à des lignes non planes.

115. Dans le cas d'un cercle, le procédé exposé par Leibniz revient à une construction point par point de son axe dans l'espace. Le paragraphe suivant étend le procédé à la construction de l'axe d'une figure plane quelconque.

116. ABC est donc un triangle équilatéral.

117. Retour un peu incongru sur l'interprétation d'une définition d'Euclide, déjà mentionnée dans les fragments précédents (cf. supra, IV, note 2).

B priori congruens et congruenter posita, id est, ut punctum huius puncto illius respondens eodem modo se habent ad *B.A.C* ut punctum illius ad *A.B.C*, eaeque lineae producantur, donec sibi occurrant, occurrent sibi necessario in puncto *X* quod se habet eodem modo ad *A.B.C.* Et si per punctum *C.* etiam talis linea ducta fuisset congrua congruenterque prioribus, ea ipsa occurrisset in puncto eodem *X.* Hinc autem quotvis ejusmodi puncta inveniri possunt, adeoque et linea recta describi poterit per puncta.

(76) Resumamus aliqua [61] : a puncto quolibet ad quodlibet ducta intelligi potest linea, eaque rigida [62].

(77) *A.B.* significat [63] situm ipsorum *A* et *B* inter se, id est tractum aliquem rigidum per *A* et *B*, quem tractum nobis sufficit esse lineam. Ita *A.B.C.* significat tractum alium rigidum [64] per *A. B. C.*

(78) [65] Quicquid in spatio ponitur, id moveri potest, sive punctum sit sive linea, sive alius tractus, sive cuilibet in extenso

61. Barré : « *A* γ *B* seu *A* ita moveri potest ut incidat in locum ipsius *B* » ; puis : « *A.* significat punctum ».

62. Barré : « id est cuius pars una non possit moveri immota alia » ; « id est in qua nullam discrimen… » ; et, tout en essayant de définir le concept « rigida » Leibniz a barré aussi : « in quo nihil unita » et « cuius partium relatione ad se invicem nulla mutatio fieri potest ».

63. Barré : « lineam quandam rigidam… ».

64. Barré : « punctis *A. B. C.* terminatum per puncta *A.B.C.* compositum ex lineis *A.B* et *B.C* et ita porro ».

65. Barré : « (78) : Si moveatur linea *A.B.*, incidet in aliam quamlibet ei congruam *X.Y.*, itaque dicemus *A.B.* γ *X.Y.*, sive cuilibet lineae alia congrua designari potest. (79) : Moveri potest linea *A.B.* quiescente puncto *A.* Ponamus hoc motu *B.* incidere in *Y.*, fiet *A.B.* γ *X.Y* cuius rei ratio est quia plura congrua se attingere. (80) : Moveri potest *A.B.* ita ut punctum *A* incidat in punctum datum *C* et punctum *B* in quodlibet aliud, fiet : *A.B.* γ *C.Y.* »

autre passant par B, congrue à la précédente, et disposée de façon congrue à la première (un de ses points est avec B.A.C dans le même rapport que le point correspondant sur l'autre droite avec A.B.C), lorsqu'on trace ces lignes jusqu'à leur point d'intersection X, celui-ci se trouvera nécessairement dans un même rapport avec A, B, C. Aurions-nous tracé une ligne semblable en partant de C, congrue avec les premières et dans une situation congrue à leur égard, elle les aurait coupées au même point X. Voici donc le moyen de trouver tous les points X qu'on veut et donc de construire une droite point par point.

76 En résumé [118] : d'un point quelconque à un point quelconque, on peut concevoir qu'une ligne a été tracée et qu'il s'agit d'une ligne rigide [119].

77 A.B représente la situation mutuelle de A et B, c'est-à-dire un tracé rigide passant par A et B, que nous pouvons ramener à une ligne [120] ; A.B.C représente donc un autre tracé rigide [121] passant par A, B, C [122].

78 [123] Tout objet situé dans l'espace, qu'il s'agisse d'un point, d'une ligne ou d'un autre tracé peut être mis en mouvement ; en d'autres termes à tout élément d'un extensum on peut associer un élément

118. Barré : « A γ B, en d'autres termes, on peut déplacer A de façon à ce qu'il parvienne au lieu de B » puis : « A représente un point. »

119. Indépendamment du fait que Leibniz n'a pas trouvé de définition satisfaisante pour la notion de rigidité, on peut considérer cette proposition comme l'un des axiomes fondamentaux de la Caractéristique Géométrique en 1679.

120. Cette assimilation a de quoi surprendre si l'on songe que la relation entre deux points, dont le réquisit purement rationnel est leur considération simultanée, est une chose purement idéale, un rapport. Nous devons admettre que cette assimilation répond surtout à un objectif pédagogique (cf. Cf. supra, *Introduction*).

121. Barré : « La figure A.B.C délimitée par les points A, B, C est composée des lignes A.B, B.C, ainsi de suite… » La notation *A.B.C* se précise dans le manuscrit en désignant non plus un ensemble de points *A*, *B* et *C*, mais ces trois points unis par les trois lignes qui les relient deux à deux.

122. Dans les §§ 76-82 Leibniz résume les principes fondamentaux de son essai. On voit bien que la définition du *situs* au moyen d'un *tractus rigidus* (qui peut être assimilé à une ligne, et même à une ligne droite, mais pas nécessairement) devient plus claire au cours de la rédaction. Dans les fragments X et XII cette notion sera posée d'emblée comme la notion fondamentale.

123. Barré : « 78 : En déplaçant la ligne A.B on tombera sur une autre ligne X.Y congrue, nous noterons donc A.B γ X.Y, soit pour toute ligne on peut déterminer une ligne congrue. 79 : On peut déplacer la ligne A.B sans déplacer le point A. Supposons qu'au cours de ce mouvement B parvienne en Y, on aura A.B γ X.Y, qui s'explique par le fait que plusieurs objets congrus se touchent. 80 : On peut déplacer A.B. de sorte que le point A parvienne en un point C donné et le point B en un point quelconque, on aura : A.B γ C.Y »

assignari potest aliud congruum. Hinc $A.\ \gamma X.$, $A.B.\ \gamma X.Y$, $A.B.C\ \gamma X.Y.Z$[66] vel $A.B.C\ \gamma\, \omega X.Y.Z.$

(79)[67] Datis duobus diversis in extenso poni potest unum quiescere, alterum moveri.

(80)[68] Si aliquod eorum, quae sunt in tractu rigido, moventur, ipse tractus rigidus movetur[69].

(81) Omnis tractus ita moveri potest, ut punctum eius datum incidat in aliud datum. $A.B.C.\ \gamma D.X.Y.$

(82) Omnis tractus moveri potest uno eius puncto manente immoto. $A.B.C.\ \gamma A.X.Y.$

(83) *Recta* est tractus qui moveri non potest, duobus punctis in eo quiescentibus ; sive si quidam tractus moveatur duobus punctis manentibus immotis, si alia praeterea in eo puncta ponantur manere quiescentia, omnia ea puncta dicentur in directum sita, sive cadere in tractum qui dicitur recta. Seu si $A.B.C.\ \gamma A.B.Y.$ necesse est esse $C \infty Y$, hoc est si punctum aliquod reperiatur $C.$ situm in

66. Barré : « Item $A\ \gamma\, {}_3X\ \gamma\, {}_6X\ {}_9X\ \gamma\, \omega X.$, $A.B.\ \gamma\, {}_3X.{}_3Y\ \gamma\, {}_6X.{}_6Y.$, etc. $\gamma\, \omega X.Y$, $A.B.C\ \gamma\, {}_3X.{}_3Y{}_3Z.\ \gamma\, \omega X.Y.Z.$ Nimirum intelligi potest moveri ut incidat in $A.{}_3X.{}_6X$, &c. »

67. Barré : « (79) : Omnis tractus ita moveri potest ut punctum eius datum incidat in aliud quoddam punctum datum quia unumquodque punctum alteri per omnia congruum est ideoque congruis $A.B.C\ \gamma D.X.Y.$ » Il y a aussi d'autres phrases barrées, telles que : « (80) : Quotcunque puncta poni potest moveri situ eodem servato, nam tractu rigido connecti intelligantur per 76 isque moveatur per 78, quicquid autem in tractu... » ; « (81) : Omnis tractus ita moveri potest, ut punctum eius datum incidat in... » ; « (81) : Datis duobus tractibus congruis, effici potest ut se contingant in punctis respondentibus (puncta respondentia in congruis voco, quae coincidant, si ipsa congrua sibi applicata sive coincidentia ponantur) » ; « Nam unus tractus poni potest quiescere alter moveri per 80. Moveatur ergo ita ut punctum in se datum quod dictum est, incidat in aliud punctum datum alterius per 79 et factum erit quod quaeritur. Hinc $A.B.C\ \gamma A.X.Y.$ »

68. A cause peut-être des nombreux passages rayés dans ce qui précède, Leibniz se trompe et écrit (81) au lieu de (80) pour numéroter ce nouveau paragraphe. L'erreur se prolonge dans les paragraphes suivants. La numération proposée la corrige, en suivant l'exemple de l'édition Gerhardt.

69. Barré : « Nam tractus rigidus est cuius una pars non potest moveri immota alia. Nihil autem in aliquo moveri potest, ne punctum quidem aut extremum, nisi parte mota. Quia extrema per se sola moveri non possunt. (81) : Duae quaelibet lineae rigidae possunt ita sibi apponi ut sese attingant in uno solo puncto. »

qui lui soit congru. D'où $A\,\gamma X$, $A.B\,\gamma X.Y$, $A.B.C\,\gamma X.Y.Z$ ou $A.B.C\,\gamma\,\omega X.Y.Z.$

79[124] Deux points distincts étant donnés dans un extensum, on peut supposer l'un au repos, l'autre en mouvement.

80 Si un des éléments d'un tracé rigide est en mouvement, ce tracé rigide est lui-même en mouvement.

81 Tout tracé peut être mis en mouvement de telle sorte qu'un de ses points coïncide avec un autre point donné, $A.B.C\,\gamma D.X.Y.$

82 Tout tracé peut être mis en mouvement, un de ses points demeurant fixe, $A.B.C\,\gamma A.X.Y$[125].

83 La *Droite* est un tracé ne pouvant se mouvoir lorsque deux de ses points restent immobiles[126], en d'autres termes : si le mouvement d'un certain tracé laissant deux points immobiles oblige à supposer que les autres points choisis sur lui le sont, on dira que tous ces points sont alignés et se situent sur un tracé nommé droite.

En d'autres termes, le fait que $A.B.C\,\gamma A.B.Y$ entraîne $C \infty Y$. Ou encore lorsqu'on a trouvé un point C aligné avec les points A, B, on

124. Barré : « 79 : Tout tracé peut être déplacé de sorte qu'un point donné parvienne en un autre point donné, dans la mesure où chacun de ses points est congru à un autre point appartenant à chacune (de ses positions), d'où $A.B.C\,\gamma D.X.Y$ » ; « 80 : On peut déplacer un nombre quelconque de points en préservant leur situation, imaginons en effet, d'après 76, qu'ils soient reliés par un tracé rigide et que ce tracé se déplace, d'après 78, tout point sur ce tracé... » : « 81 : Tout tracé peut être déplacé de sorte qu'un point donné parvienne en... » ; « Deux tracés congrus étant donnés, on peut faire en sorte qu'ils se touchent en des points correspondants (dans des figures congrues, j'appelle points correspondants des points qui coïncident si on suppose que ces figures congrues soient appliquées l'une sur l'autre ou qu'elles coïncident) » ; « On peut en effet, d'après 80, supposer qu'un tracé soit immobile tandis que l'autre se déplace. Déplaçons donc ce dernier de sorte que le point donné que j'ai dit parvienne sur un autre point donné de l'autre tracé, d'après 79, on obtiendra ainsi ce qu'on cherche. D'où $A.B.C\,\gamma A.X.Y$ »

125. Expression par une relation de congruence d'une des conditions de possibilité de la génération de la droite et du cercle exposée au fragment III.

126. Nouvelle définition de la droite.

directum cum punctis *A. B.* non potest tractus *A.B.C.* (vel *A.C.B*)

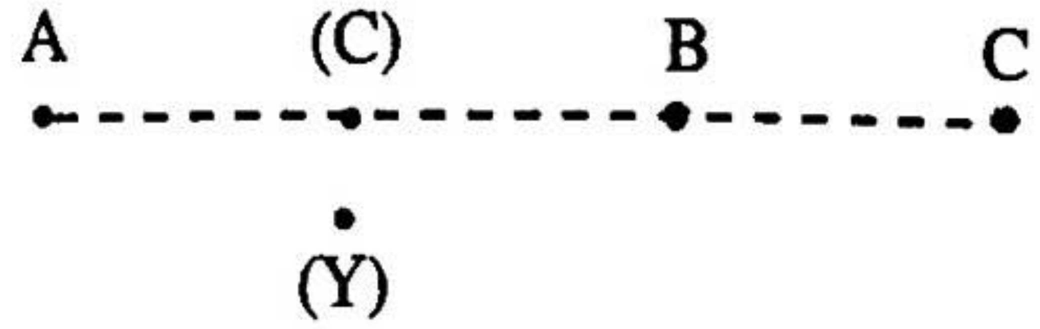


fig. 32

ita moveri manentibus *A.B.* immotis, ut *C.* transferatur in *Y.*, atque ita congruat tractus *A.B.Y.* priori *A.B.C.* Sive quod idem est, non potest praeter punctum *C.* aliud adhuc reperiri *Y.*, quod ad puncta fixa *A.B.* eundem quem ipsum *C.* situm habeat, sed necesse est, si tale quod *Y.* assumatur, ipsum ipsi *C* coincidere seu esse $Y \infty C$. Unde dici potest, punctum *C.* sui ad puncta *A.B.* situs esse exemplum unicum. Et punctum, quod ita moveatur, ut ad duo puncta fixa situm servet in sua specie unicum, movebitur in recta. Nempe si sit : $A.B.Y \,\gamma\, A.B.X$ sitque ideo $Y \infty X$ erit ϖX (∞ ϖY) linea recta. An autem dentur huiusmodi puncta in directum sita, et an tractum componant, et utrum tractus ille linea sit, non sumendum, sed demonstrandum est. Via autem puncti ita moti, utique *linea recta* erit, quae quidem si per omnia puncta huiusmodi transit, utique locus omnium punctorum duobus punctis in directum sumtorum, non alius tractus quam linea erit.

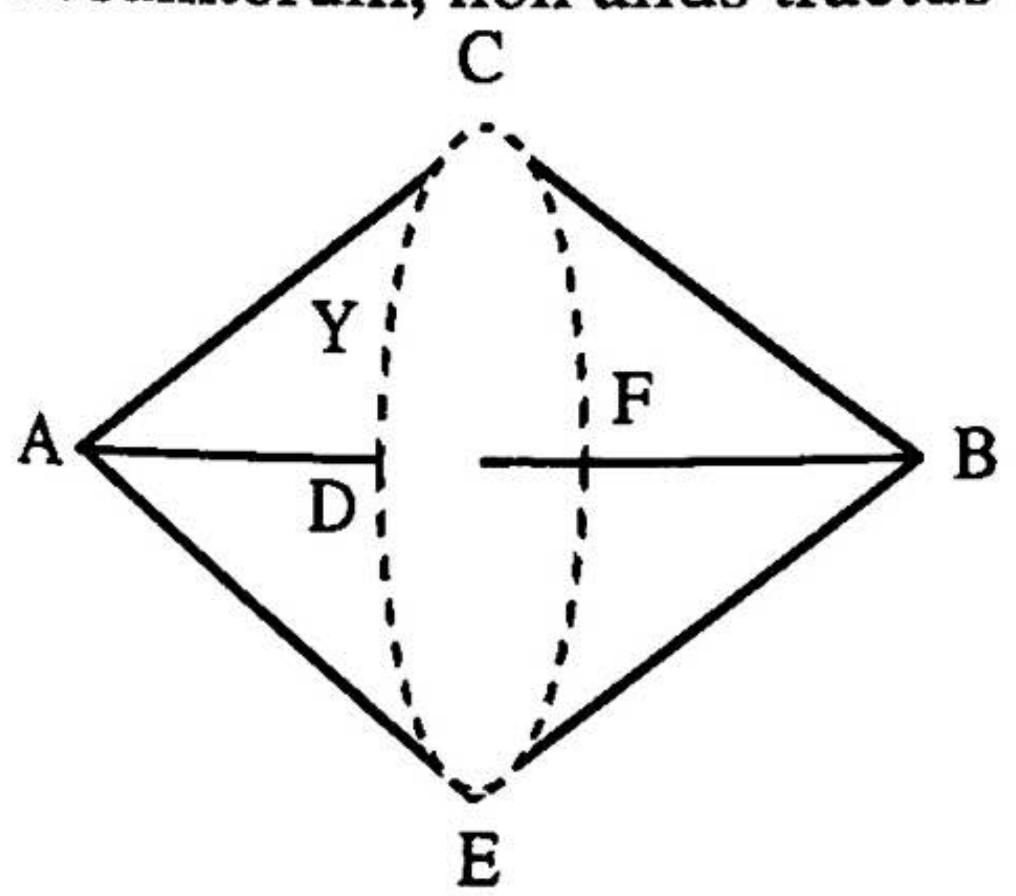


fig. 33

(84) Si duobus in tractu *A.C.B.* punctis *A. B.* manentibus immotis, moveatur ipse tractus, linea quam punctum eius motum *C* describet, dicetur *circularis*. An autem possit tractus aliquis moveri duobus punctis manentibus immotis, etiam non sumendum, sed demonstratione definiendum est. $A.C.B \,\gamma\, A.Y.B$ dicetur ϖY linea *circularis* et si sint quotcunque puncta *C. D. E. F.* sitque

ne peut déplacer le tracé A.B.C (ou A.C.B) en laissant A, B immobiles et en déplaçant C en Y, le tracé ABY est donc congru au précédent A.B.C ; on peut encore dire, ce qui revient au même : il est impossible de trouver un point Y différent de C ayant avec les points fixes A, B la même situation que C lui-même, et si l'on choisit Y répondant à cette condition, il doit nécessairement coïncider avec C, soit Y ∞ C. On peut en déduire que C est le seul point ayant la situation qui est la sienne avec A, B. Et un point se déplaçant de manière à conserver à l'égard de deux points fixes une situation qui est la seule de son espèce, se déplacera sur une droite. En d'autres termes, si A.B.Y γ A.B.X entraîne X ∞ Y, ϖX (∞ ϖY) sera une droite. Mais l'existence de points alignés de ce genre, le fait qu'ils constituent un tracé et que ce tracé soit une droite, il ne faut pas le postuler, mais le démontrer [127]. On sait au moins que la trajectoire d'un point mû de la sorte sera une *ligne droite* passant par tous les points de cette nature ; le tracé que tous les points alignés avec deux points sont susceptibles de former ne pourra être qu'une ligne.

84 Lorsque deux points A, B du tracé A.C.B demeurent fixes alors que le tracé est lui-même en mouvement, la ligne que décrira un point C en mouvement sera par définition *circulaire*. Mais la possibilité pour un certain tracé de se déplacer quand deux de ses points demeurent fixes, il ne faut pas non plus l'admettre, mais l'établir démonstrativement [128]. Si A.C.B γ A.Y.B (fig. 33), la ligne ϖY sera par définition *circulaire* et si pour un certain nombre de points C, D, E, F on a

127. Cf. supra, note 81.
128. Cette démonstration ne sera fournie que par la mise au point d'une définition réelle de la droite, cf. supra, V, note 11.

$A.B.C \gamma A.B.D \gamma A.B.E \gamma A.B.F$ dicentur esse in una eademque circulari. Haec definitio lineae circularis non praesupponit dari rectam et planum, quod facit Euclidis definitio.

(85) [70] Locus omnium punctorum quae eodem modo se habent ad A quemadmodum ad B, appellabitur *planum*. Sive si sit $A.Y \gamma B.Y$ erit Y *planum*.

(86) [71] Hinc si sit $A.C.B \ \gamma \ A.Y.B.$, sitque $A.C. \ \gamma \ C.B.$ (adeoque et $A.Y \gamma B.Y.$), erit linea $\overline{\omega Y}$ circularis in plano. An autem omnis circularis sit in plano postea definiendum est.

(87) Si sint $A.B \gamma B.C \gamma A.C$ sitque $A.Y. \gamma B.Y. \gamma C.Y.$ erit $\overline{\omega Y}$ linea recta.

(88) Si sit $A.Y \gamma A.(Y)$. erit Y superficies *sphaerica*. (γ. significat congruitatem, ∞ coincidentiam). Cum dico $A.B \gamma A.Y.$, possem quidem dicere distantiam AB. aequari distantiae $AY.$, sed quia postea cum tria vel plura adhibentur, ut $A.B.C \gamma A.B.Y$, non hoc tantum volumus triangulum ABC. triangulum ABY. aequari, sed praeterea simile esse, id est congruere, ideo signo γ potius utor).

(89) Si sit $Y. \gamma (Y)$ erit locus omnium $Y.$ seu $\overline{Y}$ extensum absolutum, sive *Spatium*. Nam locus omnium punctorum inter se congruentium est locus omnium punctorum in universum. Omnia enim puncta congrua sunt,

(90) Idem est si sit $Y. \gamma A.$ nam (ex characterum significatione) si $Y. \gamma A$ erit $(Y) \gamma A.$ Ergo $Y. \gamma (Y)$. Nimirum locus omnium punctorum Y dato puncto A congruorum, utique est etiam spatium ipsum interminatum, omnia enim puncta cuilibet dato congruunt.

(91) Proximum est : $A.Y. \gamma A.(Y)$. Locus omnium Y seu $\overline{Y}$

70. Barré : « Si sit $B.C \gamma A.C$ ducere per punctum C. lineam ωY, ita ut sit $Y.B \gamma Y.C$. Hoc fit si punctis $A.B.$ immotis per C. describatur linea circularis. Sed idem fieri potest etiam aliis lineis descriptis. Itaque... »

71. Barré : « Linea circularis est in plano. »

$A.B.C \gamma A.B.D \gamma A.B.E$, on dira qu'ils sont sur un seul et même cercle. Cette définition de la ligne circulaire ne présuppose pas comme celle d'Euclide qu'on connaisse déjà le plan et la droite [129].

85 [130] Le lieu de tous les points dans le même rapport avec A et B se nommera *plan*. Soit encore, si $A.Y \gamma B.Y$, Y sera un *plan*.

86 [131] Nous en déduisons que si $A.C.B \gamma A.Y.B$ et $A.C \gamma C.B$ (et donc également $A.Y \gamma BY$) $\overline{\omega Y}$ sera une ligne circulaire située dans un plan. Reste ensuite à déterminer si tout cercle est dans un plan.

87 Si $A.B \gamma B.C \gamma A.C$ et $A.Y \gamma BY \gamma C.Y$, $\overline{\omega Y}$ sera une Ligne droite [132].

88 Si $A.Y \gamma A(Y)$, Y sera une surface *sphérique*. (γ signifie congruence, ∞ la coïncidence). Au lieu de dire $A.B \gamma A.Y$, je pourrais aussi bien dire que la distance A.B est égale à la distance A.Y, mais j'applique ultérieurement ce signe à trois points ou plus, or en écrivant par exemple $A.B.C \gamma A.B.Y$, je ne veux pas dire seulement que le triangle A.B.C est égal à A.B.Y mais encore qu'il lui est semblable, c'est-à-dire congru ; je préfère donc utiliser le signe γ).

89 Si $Y \gamma (Y)$ le lieu de tous les Y, soit $\overline{Y}$, sera l'extensum absolu qui n'est autre que l'*Espace* [133]. Car le lieu de tous les points congrus entre eux est celui de tous les points en général, puisque tous les points sont congrus.

90 Il en va de même si on a $Y \gamma A$, car, par définition des caractères, $Y \gamma A$ entraînera $(Y) \gamma A$ et donc $Y \gamma (Y)$. Le lieu de tous les points Y congrus à un point donné A est en fait une nouvelle fois l'espace indéterminé lui-même, tous les points étant congrus à un point donné quelconque.

91 Nous obtenons immédiatement après [134] $A.Y \gamma A(Y)$, le lieu de

129. Livre I, définition 15 : « Un cercle est une figure plane comprise à l'intérieur d'une ligne, appelée circonférence et est telle que toutes les droites issues d'une point intérieur (unique) vers la circonférence sont égales entre elles. »

130. Barré : « $B.C \gamma A.C$ entraîne qu'on peut tracer une ligne ωY passant par C telle que $Y.B \gamma Y.C$. C'est le cas si, en maintenant les points A, B immobiles, on fait passer par C une ligne circulaire. Mais on peut parvenir au même résultat en décrivant d'autres lignes. C'est pourquoi... ».

131. Barré : « Une ligne circulaire se situe dans un plan ».

132. Cf. supra, § 75. Leibniz ne parvient ici à définir la droite au moyen d'équations de congruence qu'en faisant intervenir trois points constituant les sommets d'un triangle équilatéral. Il généralise la formule au § 97.

133. Cf. supra, V, note 5.

134. Leibniz explore, en faisant jouer la combinatoire, la possibilité d'une suite ordonnée de définitions des lieux (qui lui servira de fil conducteur dans la présentation de sa caractéristique destinée à Huygens), fondée sur une corres-

dicatur [72]. *Sphaerica,* quae est locus omnium punctorum ejusdem ad datum punctum situs existentium. Datum autem punctum dicitur *Centrum.*

(92) Idem est si sit $A.B \; \gamma \; A.Y$. Nam ideo erit et $A.B. \; \gamma \; A.(Y)$. ac proinde $A.Y \; \gamma \; A.Y$, ubi nota, ipsum *B.* esse ex numerorum *Y.* seu esse *bY.* Si enim *Y.* omnia puncta comprehendit, quae eum habent situm ad *A*, quem *B* habet, utique ipsum *B.* comprehendet, quod eum utique situm ad *A* habet quem habet. Sphaerica est locus omnium punctorum dati ad punctum datum situs (id est dati puncti situi congrui situs) existentium.

(93) Si sit $A.Y. \; \gamma B.Y.$ locus omnium *Y.* seu $\overline{Y}$ dicatur *planum* sive locus punctorum ut *Y*, quorum unumquodque ad unum ex duobus datis punctis *A.* eodem modo situm est, quemadmodum ad alterum *B*, est *planum.* Notandum est Loci expressionem in aliam converti non posse in qua simul sint *Y.* et *(Y).*

(94) Si sit $A.B. \; \gamma \; C.Y.$ erit $\overline{Y}$*sphaerica.* Nam erit

$A.B. \; \gamma \; C.Y. \; \gamma \; C.dY.$ sit $dY. \; \infty D.$, fiet : $C.D. \; \gamma \; C.Y.$, adeoque locus erit sphaerica per 91 [73].

(95) *Y.* et *(Y)* significant quodcunque punctum loci alicuius, et quodcunque aliud praeter prius. Si *zY.* significat quodlibet punctum loci seu omnia loci puncta distributive, idem etiam significat *Y* absolute positum. *dY.* significat unum aliquod peculiare punctum loci. $\overline{Y}$ significat omnia puncta loci collective, seu totum locum. Si locus sit Linea hoc ita significo $\overline{\omega}Y$. Si sit superficies ita $\overline{\omega\psi}Y$. Si solidum ita : $\overline{\omega\psi\varphi}Y$.

(96) Si sit $A.B.C \; \gamma \; A.B.Y$ (sive si sit $A.B.Y \; \gamma \; A.B.(Y)$) tunc locus omnium *Y.* seu *Y* dicetur *Circularis*, id est si plurium punctorum idem sit situs (vel datus) ad duo data puncta, *Locus* erit *Circularis.*

(97) Si sit $A.Y. \; \gamma \; B.Y. \; \gamma \; C.Y.$ tunc locus omnium *Y.* seu $\overline{Y}$ dicetur *recta* [74].

---

72. Barré : « *Ambitus Sphaerae* ».
73. Barré : « Idem est si sit $A.B. \; \gamma \; B.Y.$ »
74. Barré : « (necesse est autem esse $A.B \; \gamma \; B.C\gamma \; A.C$ ut jam ostendam). Potest et sic exprimi : $A.B.C.Y \; \gamma \; A.B.C.(Y)$. (98) : Si sit $A.D \; \gamma B.D \; \gamma \; C.D$ erit $A.B \; \gamma \; B.C \; \gamma \; A.C$. »

tous les Y, soit $\overline{Y}$ [135], sera nommée *Sphère*, c'est le lieu de tous les points ayant une même situation par rapport à un point donné ; ce point est lui-même appelé *Centre*.

92 Il en va de même si on a $A.B \gamma A.Y$. Car ceci entraînera :

$A.B \gamma A.(Y)$ et par suite $A.Y \gamma A.Y$, où la lettre B fait elle-même partie du nombre des Y, elle est par exemple identique à 6Y. Si Y comprend tous les points ayant par rapport à A la même situation que B, il comprendra au moins B lui-même, ayant à l'égard de A la même situation que lui-même. La sphère est le lieu de tous les points ayant à l'égard d'un point donné une situation donnée (congrue à celle d'un point donné).

93 Si $A.Y \gamma BY$ le lieu $\overline{Y}$ de tous les Y sera nommé *plan*, en d'autres termes le lieu des points Y ayant la même situation par rapport à l'un et à l'autre de deux points donnés A et B, est un *plan*. Remarquons que la formule exprimant ce Lieu ne peut être transformée en une autre faisant apparaître Y et (Y).

94 Si $A.B \gamma C.Y$, $\overline{Y}$ sera une sphère. On aura en effet

$A.B \gamma C.Y \gamma C._dY$; si $dY \infty D$ on obtiendra $C.D \gamma C.Y$, ce lieu sera donc une sphère d'après la proposition 91.

95 Y et (Y) représentent n'importe quel point d'un lieu, (Y) n'importe quel autre lieu différent du premier, zY n'importe quel point d'un lieu, soit tous les points de celui-ci distributivement, Y le même lieu pris absolument, dY un point particulier de ce lieu, $\overline{Y}$ l'ensemble de tous les points d'un lieu pris collectivement, c'est-à-dire ce lieu tout entier. S'il s'agit d'une Ligne, je le note $\overline{\omega}Y$, d'une surface, $\overline{\omega\psi}Y$, d'un solide, $\overline{\omega\psi\varphi}Y$.

96 Si $A.B.C \gamma A.B.Y$ (c'est-à-dire si $A.B.Y \gamma A.B.(Y)$), le lieu $\overline{Y}$ de tous les Y sera nommé *circulaire*, en d'autres termes si plusieurs points ont une même situation (donnée) à l'égard de deux points donnés, leur *Lieu* sera un *cercle*.

97 Si $A.Y \gamma B.Y \gamma C.Y$ le lieu $\overline{Y}$ de tous les Y sera par définition une *droite* [136].

---

pondance implicite (et fallacieuse) entre la simplicité des lieux et celle des équations qui les expriment (cf. infra, *Postface*).

135. Progrès décisif dans la notation, dans la mesure où jusqu'ici la notation « ensembliste » $\overline{Y}$ ne s'appliquait qu'aux indices numériques des points et non aux points eux-mêmes. Les paragraphes suivants sont donc consacrés à une transcription plus rigoureuse des équations de congruence exprimant les lieux.

136. Il est significatif que dans la lettre à Huygens cette équation de la droite intervienne plus tardivement. Elle n'est en effet pas analogue aux précédentes et n'exprime pas la vraie nature de la droite, laquelle dépend de deux points.

(98) Si sit *A.B.C.Y γ A.B.D.Y* erit $\overline{Y}$ *Planum* seu si *C.D.* duo puncta eodem modo sint ad tria *A.B.Y.*, erunt haec tria in eodem plano, et si duobus ex his datis *A.B* quaeratur tertium *Y.*, locus omnium *Y.* erit planum. Ubi patet ipsa *A.B.* sub *Y.* comprehendi. Demonstrandum est hunc locum cum altero qui est prop. 94 coincidere. Hoc ita fiet : *C.Y γ D.Y* locus est ad planum per prop. 92. Sint *3Y. ∞A* et *7Y ∞B*, erit*C.A γ D.A* et *C.B γ D.B.* Ergo fiet : A‿B‿C‿Y γ A‿C‿D‿Y. Nam 1 patet

1 2 3 — 4 5 — 6   1 2 3 — 4 5 — 6

per se et 2 per (3) et 3 per (1) et 4 per (2) et 5 per se et 6 per se.

(99) Si sit *A.Y γ B.Y γ C.Y*, locus $\overline{Y}$ erit *punctum*, sive *Y* satisfaciens non erit nisi unicum sive erit *Y γ (Y)*. Haec propositio demonstranda est.

(100) Habemus ergo loca ad punctum, ad Rectam, ad Circularem, ad Planum, ad Sphaericam, solis congruentiis mira simplicitate expressa, sed haec partim vera, partim possibilia esse, et cum aliis definitionibus coincidere nostras demonstrandum est.

(101) Si tractus sive extensum quodcunque moveatur uno puncto existente immoto, aliud quodcunque eius punctum movebitur in Sphaerica. Pono autem ipsum extensum esse rigidum, seu partes situm eundem servare. Habebimus ergo modum inveniendi Sphaericae puncta quotcunque. Potest etiam *A.B γ A.Y.* esse data, si tractus transeat per duo puncta *A.B.* Tractum autem aliquem (sive linea sit sive superficies sive solidum) per duo data puncta ducere, et tractum movere uno puncto immoto, utique in potestate est.

(102) [75] Si per duo data puncta transeant duo tractus congrui, *congruenter*, id est ita ut puncta respondentia in duobus tractibus

75. Dans le manuscrit on lit le numéro 101 au lieu de 102 pour ce paragraphe, et de même pour les suivants.

98 Si ABCY γ ABDY, $\overline{Y}$ sera un *Plan*, en d'autres termes si les deux points C, D ont un même rapport à l'égard des trois points A, B, Y, ces trois points seront dans un même plan, et si, deux de ces points A, B étant donnés, on en cherche un troisième Y, le lieu de tous les Y sera un plan. Il est ici évident que le signe Y peut représenter A et B eux-mêmes. Mais nous devons démontrer que ce lieu coïncide avec celui de la proposition 93. La démonstration sera la suivante : le lieu défini par C.Y γ D.Y (1) est un plan, d'après la proposition 91. Posons 3Y ∞ A et 7Y ∞ B, nous aurons C.A γ D.A (2) et C.B γ D.B (3). Nous aurons donc : A‿B‿C‿Y γ A‿C‿D‿Y. 1 est évident

1 2 3 — 4 5 — 6   1 2 3 — 4 5 — 6

par lui-même, 2 l'est d'après (3), 3 d'après (1), 4 d'après (2), et 5 est évident de soi tout comme 6.

99 Si A.Y γ BY γ C.Y, le lieu $\overline{Y}$ sera un *point* [137] c'est-à-dire qu'il n'y aura qu'un unique Y satisfaisant cette relation, on aura donc Y γ (Y). Cette proposition reste à démontrer.

100 Nous sommes donc parvenus à exprimer, au moyen des seules congruences et par un procédé remarquablement simple, les lieux correspondants à un Point, une Droite, un Cercle, un Plan, une Sphère, mais ces lieux sont les uns réels, les autres possibles [138], et nous devons démontrer que nos définitions coïncident avec leurs autres définitions.

101 Si on déplace un tracé c'est-à-dire un extensum quelconque, dont un unique point demeure immobile, tout autre point se déplacera sur une Sphère. Je suppose encore cet extensum rigide, c'est-à-dire que ses parties conservent la même situation. Ceci nous donnera le moyen de trouver sur une Sphère tous les points qu'on souhaite. On peut également imposer la relation A.B γ A.Y lorsque le tracé doit passer par les deux points A, B. Or nous avons toujours la possibilité de faire passer un tracé, qu'il s'agisse d'une ligne, d'une surface, ou d'un solide, par deux points donnés et de le mouvoir en laissant immobile un de ses points.

102 Si deux tracés congrus passent *de manière congrue* par deux points donnés, de sorte que les points qui se correspondent d'un tracé à

137. Si les points A, B, C ne sont pas alignés, ceci n'est vrai que si le point Y appartient au plan défini par A, B, C (c'est même une définition possible de ce plan). En règle générale, l'ensemble $\overline{Y}$ comporte deux points, symétriques par rapport à ce plan. Si les points A, B, C sont pas alignés, la proposition n'est vraie que si Y appartient à la droite ABC.

138. Le défaut de la définition des lieux par des équations aveugles est de ne pas constituer des définitions réelles. Leibniz constate donc lui-même qu'il s'est détourné du mode de raisonnement ébauché dans les fragments V et VI.

situa habeant ad duo puncta data unumquodque ad suum, congruos, moveanturque aut etiam si opus sit crescant etiam congruenter, donec sibi occurrant, loca, in quibus puncta eorum respondentia sibi occurrent, erunt puncta plani illius, quod ad duo puncta data eodem modo se in quolibet puncto suo habere, definivimus. Posse autem congruenter moveri, posse congrue ac congruenter produci, donec occurrant, postulo [76].

(103) Si jam sphaericam sphaerica, aut plano secemus, habebimus circularem, si planum plano, habebimus rectam. Si rectam recta, punctum. Ostendendum autem est has sectiones fieri posse, et punctorum Sphaericae et Sphaericae, vel plano et plano, vel plano et Sphaerica communium, esse tractum. Si Sphaerica planum vel Sphaericam tangat locus, etiam est punctum, cum scilicet circularis fit minima seu evanescit [77].

(104) Caeterum omnes definitiones rectae communes nondum satis perfectae sunt, nam dubitari potest, nam semper adhuc demonstratione opus est, quod talis recta sit possibilis. Quod tamen videtur ponendum inter <facilissima> tali itaque opus definitione, ut statim appareat rectam esse possibilem. Si definias minimum, etiam hoc dubitari potest an detur minima a puncto ad punctum. Si definias eam cuius puncta, non magis diduci possunt, praesupponis distantiam, seu viam minimam. Diduci enim est majorem distantiam acquirere. <Aequ…> aliud est exhibere rectam materialem, seu ducere eam, aliud est cogitatione complecti.

---

76. Barré : « Eodem modo res redit si ex duobus punctis datis. »

77. Les §§ 104-108 n'ont pas été inclus par Gerhardt dans son édition de la *Characteristica Geometrica*, vraisemblablement parce que Leibniz avait encadré le texte du *folio* 16 et noté en marge : « inclusa omittantur vel aliorsum referantur ». Gerhardt a pris le mot de Leibniz à la lettre et le *folio* 16 est resté inédit. On peut pourtant considérer ces paragraphes comme une réflexion philosophique sur les paragraphes précédents, et la continuité du contenu est claire, bien que le sens de la recherche de Leibniz devienne moins géométrique dans ces paragraphes finals. Dans l'édition présente, nous ajoutons le *folio* 16 aux 1-15 déjà transcrits. La numération des paragraphes est celle de Leibniz, ce que montre la continuité de son écriture du dernier *in-folio* de sa *Characteristica Geometrica*.

l'autre possèdent des situations congrues par rapport à deux points donnés de leurs tracés respectifs, si ces tracés se déplacent ou même, si besoin est, s'accroissent, encore une fois de manière congrue, jusqu'à s'intercepter, les lieux où se rencontreront les points correspondants seront les points d'un plan ; nous avons défini ce dernier comme se trouvant, en n'importe lequel de ses points, dans le même rapport avec deux points donnés. Mais que ces tracés puissent avoir un mouvement congru et que leur construction puisse être congrue jusqu'au point d'intersection, c'est un postulat [139].

103 [140] Si nous coupons une sphère par une sphère ou par un plan, nous obtiendrons un cercle ; si nous coupons un plan par un plan, nous obtiendrons une droite ; une droite par une autre droite, un point. Mais il faut montrer que ces sections sont possibles [141] et que les points communs à deux Sphères ou à deux plans, ou à un plan et une sphère, constituent un tracé. Si une Sphère est tangente à un plan ou à une autre sphère, le lieu ainsi défini peut également être un point, dans la mesure où le cercle devient minimum, c'est-à-dire s'évanouit [142].

104 Toutes les définitions habituelles de la droite [143] demeurent d'ailleurs imparfaites en ce qu'elles laissent un doute sur la possibilité de la droite qu'on a définie, laquelle doit encore faire l'objet d'une démonstration. Mais ceci doit figurer parmi les choses les plus élémentaires, et nous avons donc besoin d'une définition faisant aussitôt apparaître la possibilité de la droite [144]. Si on la définit comme un minimum on peut encore mettre en doute l'existence d'un minimum d'un point à un autre. Si on la définit comme une ligne dont les points ne peuvent pas s'écarter, on présuppose la distance soit une trajectoire minimale. S'écarter signifie en effet acquérir une plus grande distance. Exhiber une droite matérielle, c'est-à-dire la tracer, et l'embrasser intellectuellement sont deux choses différentes [145].

---

139. Barré : « Ou ce qui revient au même, si à partir de deux points donnés… »

140. Après avoir envisagé la définition de certains lieux par un mouvement, Leibniz envisage ici leur définitions comme des sections. Le fragment XVI ébauchera une comparaison entre les deux types de définition.

141. Les fragments X et XII auront pour but de prouver ces intersections.

142. Nous en trouvons l'ébauche d'une démonstration dans le fragment III.

143. Notamment celles d'Euclide et d'Archimède.

144. Le principe de cette définition réelle sera acquis au fragment XVII, mais il était déjà pressenti au fragment V. Le point essentiel dans l'élaboration des définitions de la droite n'est donc pas aux yeux de Leibniz leur commodité, mais précisément leur capacité à démontrer l'existence de leur objet.

145. Cette ambiguïté est d'abord celle de la notion de *construction*, cf. MS., VII, p. 252.

(105) Quando duo puncta simul percipiuntur, eo ipso percipitur ipsorum situs eorum ad se invicem. Sunt autem duo quilibet situs inter duo puncta similes, adeoque sola comperceptione seu magnitudine distinguuntur. Est ergo situs discrimen magnitudo cuiusdam extensi cum duo puncta simul percipiuntur, eo ipso percipitur extensum quoddam.

(106) *Recta* est extensum quod duobus punctis simul perceptis eo ipso percipitur.

(107) Puncto uno percepto, rursusque alio percepto separatim, nulla notari potest varietas.

(108) Si simul percipiantur A.B., rursusque simul percipiantur C.D., discrimen situs est. Id tamen quod percipitur perceptis A.B. et quod percipitur perceptis C.D., similia sunt: patet enim nihil in singulis notari posse, quod non in utrisque notetur, itaque id quod percipitur perceptis A.B. et quod percipitur perceptis C.D., si ex se invicem discerni possunt sola magnitudine discernentur, itaque simul perceptis A.B. simul percipitur aliquid magnitudinem habens. Cum duo simul in spatio esse percipiuntur, eo ipso percipitur via unius in alterius locum. Sunt autem duo puncta congrua. Itaque quod percipitur, duobus punctis simul perceptis est Linea seu via puncti. Patet etiam viam hanc talem esse, ut sive ab A ad B rendas, sive a B ad A. et locus in quo erit A. congruus erit loco in quo erit B. congruenterque positus, id est, ut locus puncti venientis ab A. erit ad A., ita locus puncti venientis ad B. erit ad B., imo etiam ut locus puncti venientis a B. erit ad A., ita locus respondens puncti venientis ab A erit ad B. Cum concipimus duo puncta ut simul existentia, inquirimusque rationem cur simul existentia dicamus, cogitabimus esse simul percepta, vel certe posse simul percipi [78]. Quando aliquid percipimus velut existens, eo ipso percipimus esse in spatio, id est posse alia existere indefinitis, quae ab ipso nullo

78. Barré : « Quaecunque simul percipimus, ea percipimus in extenso Spatio, id est percipimus posse alia multa ab iis nullo modo discriminabilia simul percipi. Sive quo idem est, posse... »

105 Lorsque deux points sont perçus simultanément, c'est leur situation mutuelle qui est par là même perçue. Deux situations quelconques entre deux points sont en effet semblables et ne peuvent par conséquent être différenciées que dans une coperception, c'est-à-dire par la seule grandeur. Lorsque deux points d'un extensum sont vus simultanément, c'est donc la grandeur qui permet de différencier leur situation, et lorsque deux points d'un extensum sont vus simultanément, c'est bien un certain extensum qui est par là même perçu.

106 Une *Droite* est l'extensum perçu du seul fait que deux points en sont perçus simultanément.

107 Si un point est perçu, puis un autre point indépendamment du premier, ceci n'introduit aucune diversité.

108 Si A et B sont perçus simultanément, puis à leur tour C et D, une différenciation possible apparaît entre les situations. Toutefois ce qui est perçu lorsque A et B le sont ensemble est semblable à ce qui est perçu lorsque C et D le sont, car toutes les observations qu'on peut faire sur les couples séparément peuvent être faites sur les deux, si donc ce qu'on perçoit en voyant ensemble A, B peut être différencié de ce qu'on perçoit en voyant C, D, ce ne peut être que par la grandeur. Percevoir simultanément A et B c'est par conséquent percevoir un objet doté d'une grandeur. Lorsque deux objets sont perçus simultanément dans l'espace, est perçue par là même une trajectoire allant de l'un à l'autre [146]. Or deux points sont congrus. Ce qu'on perçoit en percevant simultanément deux points est donc une Ligne, soit la trajectoire d'un point. Il est clair également qu'une telle trajectoire permet d'aller de A à B ou de B à A ; et le lieu où se trouvera A sera congru à celui de B, et sera disposé de manière congrue, ce qui signifie que le lieu d'un point partant de A sera avec A dans le même rapport que celui d'un point partant de B avec B ; qui plus est, le lieu du point venant de B sera avec A dans le même rapport que celui du point correspondant venant de A avec B. Si nous concevons l'existence simultanée de deux points et que nous nous demandons pourquoi nous disons qu'ils coexistent, ce qui nous viendra à l'esprit sera qu'ils sont simultanément perçus ou du moins qu'ils peuvent l'être [147]. Lorsque nous percevons l'existence d'une chose, nous percevons du même coup qu'elle existe dans l'espace, c'est-à-dire que peuvent exister une infinité

146. Cf. infra, p. 336.

147. Barré : « Tout ce que nous percevons de manière simultanée, nous le percevons dans l'Espace étendu, en d'autres termes, nous percevons que nous pourrions percevoir simultanément une multitude d'autres objets totalement indiscernables des premiers. »

modo possint discerni. Sive quod idem est, posse moveri, sive posse tam in uno loco quam in alio esse, et quia non potest simul esse in pluribus locis, nec moveri in instanti, ideo locum illum percipimus ut continuum. Sed quia indefinitum adhuc est, quorsum moveatur, potest enim moveri multis modis qui inter se discerni non possunt ; hinc determinatur animus ad certum aliquem motum, si aliud praeterea ponamus, congruum priori, eo ipso enim cogitatur unum posse pervenire in alterius locum. Idque cum pluribus modis fieri potest, determinatur tamen unicus, ad quem considerandum nullo alio praeterea assumto opus est, quam his duobus positis. Id est, ex positis duobus congruis in spatio, ponitur via unius ad alterum, ipsa connectens. Simplicissima autem positio est puncti. Nam etsi ponas aliud tamen cum ex motibus diversis unius ad alterum unus determinetur, quo puncta respondentia ad se determinate moventur, patet animum tandem incidere in considerationem duorum punctorum, ea enim congrua esse constat per se [79].

Extensum est continuum. In extenso possunt fieri partes. In extenso possunt fieri partes quae existunt simul. In extenso possunt fieri partes infinitis modis. Extensi pars extensa est. In uno extenso existere possunt multa. In uno extenso existere possunt infinita. In uno extenso existere possunt infinita similia. In uno extenso existere possunt infinita congrua. Si quid in extenso existit, eique congruum est, ei coincidit. Si quid in extenso existit eique congruum non est, possunt infinita existere in eodem

79. Barré : « Itaque primum cogito : punctum A per se existere potest. Punctum existit in Spatio. Punctum coexistit aliis punctis. Punctum moveri potest. Punctum coexistere potest aliis punctis. Punctum ... » ; puis : « Punctum est in extenso simplicissimum. Punctum unum ab alio discerni nequit nisi si ipsa duo per se invicem discerni non possunt. Ergo punctum aliud per se etiam existere potest. Punctum aliquod existit. Quicquid *Extensum* existit. »

d'autres choses qu'on ne pourrait en aucune façon distinguer d'elle, soit ce qui revient au même, qu'elle peut se déplacer et se trouver dans un lieu aussi bien que dans un autre ; or comme elle ne peut être en même temps perçue en divers lieux, ni se déplacer instantanément, cela signifie que ce lieu est perçu comme un continu. Mais ce lieu étant de surcroît indéfini, il reste en effet à savoir dans quelle direction elle se dirige car elle peut se déplacer d'une infinité de façons indistingables les unes des autres ; à partir de là l'esprit s'arrête donc sur un certain mouvement et s'il en suppose un autre, c'est un mouvement congru au premier ; on conçoit par là même qu'une chose peut atteindre le lieu où une autre se trouve. Mais comme elle a de multiples façons de le faire, une seule est déterminée, de sorte que pour la concevoir il ne soit besoin de rien de plus que de la donnée de deux points. Cela signifie que dès qu'on se donne deux objets congrus dans l'espace, on suppose de l'un à l'autre une trajectoire qui les joigne. La position la plus simple est celle du point. En effet, si on suppose un autre objet, parmi les différents mouvements de l'un à l'autre, un seul est déterminé, permettant aux points correspondants de se mouvoir l'un vers l'autre de manière déterminée, l'esprit finit donc par tomber sur l'idée de deux points, et il est de soi évident qu'ils sont congrus [148].

L'*Extensum* est un continuum. Dans un extensum peuvent apparaître des parties. Dans un extensum peuvent apparaître des parties existant simultanément. Dans un extensum il y a une infinité de manières de faire naître des parties [149]. Une partie d'un extensum est un extensum. Dans un seul extensum peuvent donc exister de nombreux extensa. Dans un seul extensum peuvent exister une infinité d'extensa. Dans un unique extensum peuvent exister une infinité d'extensa semblables. Dans un seul extensum peuvent exister une infinité d'extensa congrus. Si une chose se situe dans un extensum en lui étant congrue, elle coïncide avec lui. Si elle se situe dans un extensum sans lui être congrue, une infinité de choses peuvent exister dans ce même extensum, sans coïncider avec la première tout en lui étant

148. Barré : « L'ordre des pensées est le suivant : le point A peut exister par soi. Le point existe dans l'Espace. Un point coexiste avec d'autres points. Un Point peut être mis en mouvement. Un point peut coexister avec d'autres point... » Puis : « Le point est ce qu'il y a de plus simple dans l'extensum. Un point ne peut être distingué d'un autre si ces deux points ne peuvent être distingués l'un de l'autre en eux-mêmes. Par conséquent un autre point, en lui-même, peut également exister. Un point existe. Tout extensum existe. »

149. Du fait que la détermination des parties dans un continu est seulement mentale, cf. infra, XIV.

extenso, quae priori non coincidunt, sed tamen congrua sunt[80]. Duo mobilia quae in extenso sumuntur, sibi congruere possunt, sive diversis temporibus ita locari possunt, ut prior status a posteriore discerni non possit. Locus ipse extensi extensus est. Locus extensi congruit extenso. Locus est immobilis.

80. Barré : « Si quid in extenso terminato existit, id ei successive congruum est sive terminato existit, cui congruum aliquid in alio extenso mobili assumi potest, cui non aliquid congruum in extenso mobili intra datum tempus coexistere possit. Si quotcunque in eodem extenso immobili... »

congrues[150]. Deux mobiles pris simultanément dans un extensum peuvent être congrus l'un avec l'autre, soit, à des moments différents, être localisés de telle sorte que le premier état ne puisse se distinguer du second. Le lieu d'un extensum est lui-même un extensum. Le lieu d'un extensum est congru à un extensum. Le lieu est immobile.

150. Barré : « Si quelque chose existe dans un extensum fini, il lui est successivement congru, soit congru à une chose finie, on peut déterminer une autre chose qui soit congrue à cette dernière dans un autre extensum mobile, ne pouvant elle-même coexister avec aucune autre chose congrue dans cet extensum mobile dans le même temps. »