

01-001_R

38 (41017). DE MAGNITUDE ET MENSURA [1695 – 1700]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 23 Bl. 1–2. 1 Bog. 4°. 4 S. — Gedr.: GERHARDT, *Math. Schr.* 7, 1863, S. 35–40.

- 5 Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von 1695 bis 1700 belegt. Leibniz verweist im Text auf sein im April 1695 in den *Acta Eruditorum* gedrucktes *Specimen dynamicum* [noch].

De Magnitudine et Mensura

01_top

(1) *M a g n i t u d o* est, quod in re exprimitur per numerum partium, congruentium rei datae, quae *M e n s u r a* appellatur.

- 10 *S c h o l i o n*. Exempli causa lineae magnitudo exprimitur numero pedum vel pollicum, id est partium quarum quaelibet congruit pedi vel pollici in aliqua materia (velut orichalco aul ligno) reapse dato. Sic orgyjae magnitudo (quantum homo brachia extendere potest), ad certum aliquid (velut per aversionem) designandum censetur exprimi numero sex pedum; vel septuaginta duorum pollicum, quia pes duodecim pollicum ha-
- 15 betur. Cubiti magnitudo est unius et dimidii pedis, vel unius pedis et sex pollicum, vel octodecim pollicum. Ponimus autem pedis vel pollicis magnitudinem reapse in organo datam esse. Unde patet quoque, eandem ejusdem rei magnitudinem diversis numeris exprimi, prout variatur mensura, imo interdum diversas mensuras conjungi inter se, ut cum cubitus simul designatur per pedem et pollices.

01_mid

- 20 (2) *H o m o g e n e a* sunt, quorum magnitudines numeris exprimi possunt eandem assumendo pro omnibus mensuram, tanquam unitatem.

- S c h o l*. Ita si pes sit ut unitas erit pollex ut $\frac{1}{12}$, cubitus ut $\frac{3}{2}$, orgyja ut 6. Sin pollex sit ut unitas, erit pes ut 12, cubitus ut 18, et orgyja ut 72. Et hoc modo lineae rectae cujusque longitudo exprimi potest numero quidem integro, si mensura aliquoties detracta,
- 25 verbi gratia pede ter detracto, restet nihil, ita enim recta tripedalis erit. Sed si mensura vel pede quoties fieri potest detracto restet aliquid; ad id quoque mensurandum sumi poterit certa pars pedis, exempli causa decima, quae rursus quoties fieri potest, detrahetur ab hoc residuo; exempli causa vicibus septem et pede assumpto pro unitate, numerus
- 01_bot
- quantitatis detractae erit fractus, 3 et $\frac{7}{10}$ vel $\frac{37}{10}$. Et hoc modo si res mensuranda ita

sit exhausta ut restet nihil, is numerus rei respondebit, magnitudinemque ejus exprimet. Sin adhuc supersit aliquid tunc vel possumus iterum novam assumere mensurae partem, veluti centesimam, eamque detrahare quoties fieri potest; et si error centesima parte minor nobis satis magni momenti non videatur, contenti possumus esse hac, per mensuram, et mensurae decimas, et centesimas appropinquatione, alioqui ad millesimas et ultra progressuri. Solemus autem in praxi adhibere scalam, id est constantem quandam mensurae divisionem in orichalco aut alia durabili materia factam, et quidem per decimas, et decimas decimarum seu centesimas, et millesimas et porro, quoniam hoc modo fractiones decimaliter expressae tractari possunt instar integrorum, qui nobis decadica progressionem, id est per unitates, decades, centenarios, millenarios, myriades etc. exhiberi solent; ita Ludolphus de Colonia calculo longe producto invenit, diametro circuli existente 1, circumferentiam esse $3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000}$ vel (quod in decimalibus licet) conjungendo statim in unam fractionem $\frac{3141592 \text{ etc.}}{1000000 \text{ etc.}}$ usque ad ... sedem. Sed quoniam appropinquationes hujusmodi etsi praxi vulgari sufficientes nullam dant exactam magnitudinis quaesitae cognitionem; ideoque in scientifico processu tamdiu pergimus, donec appareat series progrediendi in infinitum; et huic fini non adhibemus indistincte decimales, aut alias quaslibet scalae constantes divisiones, sed accommodamus fractiones ad rei naturam, ut scilicet facilius ad legem progressus perveniamus. Atque ita a me repertum est, si diameter sit $\frac{1}{8}$, circumferentiam fore $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \frac{1}{195}$ et ita porro in infinitum posito fractionum numeratorem esse unitatem, sed denominatores esse qui fiunt ex duobus imparibus, 1 et 3, 5 et 7, 9 et 11, 13 et 15, 17 et 19, et ita porro, invicem multiplicatis. Et ea ratione non tantum omnes appropinquationes continuando dabiles simul exprimuntur, sed etiam fieri potest ut error minor sit quovis dato. Nam ostendi potest, si circumferentia dicatur esse $\frac{1}{3}$ errorem fore minorem quam $\frac{1}{5}$ si dicatur esse $\frac{1}{3} + \frac{1}{35}$, errorem minorem fore quam $\frac{1}{9}$; si dicatur esse $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ errorem fore minorem quam $\frac{1}{13}$. Et ita porro, priorem semper ex imparium proximorum combinatione sumendo. Tota autem series infinita exacte naturam circuli exprimit. Sed

11 Ludolphus de Colonia: L. VAN CEULEN, *Vanden circkel*, 1596, lat. Fassung *De circulo et adscriptis liber*, 1619.

hoc nos rationibus ex intima natura circuli consecuti sumus, organicæ autem magnitudo circumferentiae circuli vel alterius lineae curvae per filum obtineri potest, curvae lineae rigidae accommodatum et deinde in rectam extensum et scalae applicatum, vel dum curva linea rigida volvitur in plano, quanquam provolutio illa ad securitatem
 5 filo vel catena regenda sit, ne tractio ei misceatur. Motu etiam res obtinetur, dum duo mobilia velocitatis uniformis percurrunt rectam et curvam, nam erunt lineae iisdem temporibus absolutae ut mobilium velocitates. Quodsi res mensuranda sit superficies, pro mensura poterit alia assumi superficies, verbi gratia pes quadratus qui vel cujus determinatae partes a plana superficie quoties fieri poterit detrahentur: quodsi superficies plana
 10 non sit, videndum an commode transformari possit in planam. Pro solidi mensura aliud assumetur solidum, veluti pes cubicus, eodemque modo procedetur. Comparari etiam solidorum magnitudines poterunt immergendo in liquorem, et mensurando quantum ille in vase attollatur; sed et ponderando, si ambo ex eadem materia elaborentur. Idemque et ad lineas et superficies suo quodam modo potest transferri. Atque ita Galilaeus Cy-
 15 cloidis dimensionem ponderibus investigavit, etsi veram dimensionem scientifica deinde ab aliis ratione repertam hac methodo non fuerit consecutus. Motu etiam superficies et solida interdum commode mensurantur, tanquam vestigia lineae aut superficiei. Genera-
 20 liter autem omnis aestimatio ex nostra magnitudinis definitione ad mensurae cujusdam repetitionem numeris expressam redit, aut ad numerum rei ascribendum, posito rei alteri datae ascribi unitatem. Eaque ratione etiam non tantum extensiones et diffusiones partium extra partes, ut in spatio et tempore, sed etiam intensiones seu gradus qualitatum actionumque, jura etiam, valores, verisimilitudines, perfectiones aliaque inextensa ad numeros revocantur, reperta scilicet mensura cui aut cujus partibus aliquotis congruant, quae in re mensuranda reperiuntur, sed cujus aut cujus partium aliquotarum repetitione
 25 magnitudo aestimanda formetur. Quae consideratio quanti sit momenti, et quam in ea consistat vis verae Matheseos Universalis, seu artis aestimandi in universum in Dynamicis nostris speciminibus est ostensum.

(3) Commensurabilia sunt inter se, quorum reperiri potest una mensura communis exhaustiva, cujus repetitione magnitudines eorum constituentur. Sin minus,
 30 incommensurabilia vocantur, et numerus ei, quod cum mensura pro unitate

14 Galilaeus: Vgl. die Darstellung bei [C.R. DATI], *Lettera a Filaleti di Timauro Antiata della vera storia della cicloide, e della famosissima esperienza dell' argento vivo*, 1663, S. 2–4. 26 f. in Dynamicis nostris speciminibus: G.W. LEIBNIZ, *Specimen Dynamicum*, in: *Acta Eruditorum*, 1695, S. 145–157 (GERHARDT, *Math. Schr.* 6, S. 234–246).

assumta incommensurable est, assignandus vocatur *surdus* vel *irrationalis*; sin commensurabilis sit unitati; rationalis appellatur.

Schol. Si nempe mensuram vel partes aliquotas mensuram sua repetitione constituentes quoties fieri potest detrahendo perveniatur ad exhaustionem, semper haberi potest communis mensura repetitione constituens ita. Nam tota magnitudo mensuranda exprimitur vel integris vel composito ex integris et fractis. Jam fracti quocunque reduci possunt ad communem divisorem, atque ita ad communem mensuram. Esto numerus

inventus magnitudinem quaesitam lineae exprimens $2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ reducendo ad communem denominatorem fiet $\frac{17}{6}$. Itaque si pes sit 1 vel $\frac{6}{6}$ utique communis mensura rei aesti-

matae et pedis erit $\frac{1}{6}$, quae quantitas in re aestimata continetur decies septies, in pede

sexies. Sed si sexta pars pedis seu bipollicaris linea assumatur pro unitate seu mensura, erit pes ut 6, linea vero aestimanda ut 17, adeoque pes et linea commensurabiles erunt.

Sed si fractiones procedant in infinitum, nec in unum numerum assignabilem integrum vel fractum summando colligi possint, magnitudo aestimanda erit ei, cui unitatem assignavimus, vel *partibus* ejus *aliquotis* (hoc est repetendo eam conficientibus)

incommensurabilis. Veluti si linea sit quae constet uno pede, et duabus decimis pedis, et tribus centesimis et quatuor millesimis, et quinque 10000^{mis}, et sic in infinitum, ita

ut pede posito ut 1, linea sit ut $\frac{1}{1} + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{6}{100000} + \frac{7}{1000000}$

etc. vel $\frac{1234567 \text{ etc.}}{1000000 \text{ etc.}}$ vel more decimalium 1.234567 etc. Ita enim nunquam exhaurietur

linea quae mensuranda est, et tamen vera ejus magnitudo exacte expressa habetur.

Quotiescunque enim numerus est rationalis, ut vocant, seu unitati commensurabilis, toties decimalibus expressus periodo constat, ita ut characteres iidem semper recurrant in infinitum, ut suo loco ostendemus; quod hoc loco non fieri constructio ipsa ostendit.

Porro communem mensuram investigandi haec ratio prodita est a Mathematicis, uti suo loco exponemus, ut a majore detrahatur minus quoties fieri potest. Residuum deinde

rursus quoties fieri potest ab ipso Minore antea detracto detrahatur, et secundum Residuum a secundo detracto seu primo residuo, et a secundo Residuo similiter tertium,

ita necessario vel ad exhaustionem devenietur, eritque ultimum detractum exhauiens ipsa maxima communis mensura, toties in prima magnitudine seu comparatarum majore contenta, quoties unitas in producto ex omnibus quotientibus invicem multiplicatis inest;

vel si residua supersint in infinitum, incommensurabiles erunt duae primae quantitates,

quemadmodum et residua omnia; sed ipsa series quotientium si certa lege constet, qui exprimunt quoties quivis minor a praecedente detrahi possit, comparisonem scientificam duarum magnitudinum dabit. Interim fictione quadam possumus concipere, omnes quantitates homogeneas esse velut commensurabiles inter se; fingendo scilicet elementum aliquod infinitesimum vel infinite parvum. Tali fictione constat calculus Logarithmorum, certo aliquo Elemento Logarithmico constituto. Similis fictio locum habet in Geometria, rem concipiendo perinde ac si omnes lineae constarent ex infinitis numero lineolis rectis infinite parvis, et ita perinde ac si lineae curvae essent polygona infinitorum laterum, vel perinde ac si superficies constarent ex infinitis facieculis planis, id est perinde ac si solida concava vel convexa omnia essent polyhedra hedrarum infinitae exiguitatis. Eodem modo fingi potest, omnia solida constare ex corpusculis elementaribus aequalibus infinitis numero et magnitudine infinite parvis. Et haec fictio nullum potest afferre errorem, quia (si rite procedas ex hypothesi) error nunquam fit major particulis aliquot elementaribus, qui nullam cum toto comparisonem habet, de quo nostra incomparabilium Lemmata videntur. Unde si pro particulis elementaribus fictitiis seu infinite parvis assumamus veras assignabiles quantumlibet parvas, ostendi potest, errorem qui in ratiocinando admissus videri possit, minorem esse quovis dato errore, id est nullum assignari posse. Licet autem ad commensurabilitatis imitationem concipi possit infinitesimalia illa seu infinite parva elementa aequalia esse inter se, interdum tamen fingi praestat alia procedere ratione utili ad ratiocinationem juvandam. Quae melius apparebunt ex parte illa interiori Doctrinae magnitudinum seu Matheseos Universalis, qua nempe continetur Scientia infiniti.

14 nostra incomparabilium Lemmata: Vgl. die Lemmata (4) und (5) in G.W. LEIBNIZ, *Tentamen de motuum coelestium causis*, in: *Acta Eruditorum*, 1689, S. 85–86 (GERHARDT, *Math. Schr.* 6, S. 167 bis 168).